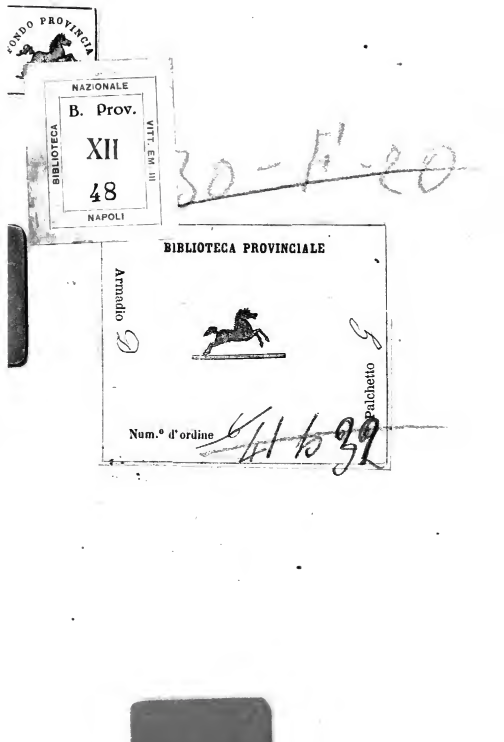






PROLÉGOMÈNES PHILOSOPHIQUES

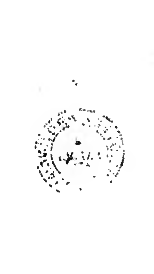
DE

LA GÉOMÉTRIE

ET

SOLUTION DES POSTULATS.





PROLÉGOMÈNES PHILOSOPHIQUES

DE LA

GÉOMÉTRIE

ET

SOLUTION DES POSTULATS

PAR

J. DELBŒUF

Docteur en philosophie et lettres
et en sciences physiques et mathématiques

SUIVIS DE LA TRADUCTION, PAR LE MÊME, D'UNE DISSERTATION
SUR LES PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE

PAR

FRÉD. UEBERWEG

Docteur en philosophie et privatdocent à l'Université de Bonn.



LIÈGE,
J. DESOER, ÉDITEUR.

Leipzig, C. MUQUARDT. | Paris, LADRANGE.

1860

LIÉGE. — IMPRIMERIE DE J. DESOER.

PRÉFACE.

L'ouvrage que nous livrons aujourd'hui à la publicité a un double but : montrer la parenté, sous le rapport philosophique, de la géométrie — et des mathématiques, en général — avec les autres sciences ; fonder ensuite la géométrie sur une base vraiment scientifique, pour arriver à une solution complète des postulats. Nous allons dire d'abord quelques mots de cette dernière partie, purement mathématique. Nous esquisserons rapidement l'histoire de nos idées. Notre but, en agissant ainsi, n'est pas de poursuivre une vaine satisfaction d'amour-propre. Nous avons cru qu'en indiquant la manière dont nous sommes parvenu à découvrir les principes que nous exposons, nous leur donnerions un nouveau degré d'évidence.

« C'est sans doute, avait dit Legendre, à l'imperfection du langage vulgaire et à la difficulté de donner une bonne définition de la ligne droite, qu'il faut attribuer le peu de succès qu'ont obtenu les géomètres quand ils ont voulu déduire ce théorème (la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits) des seules notions sur l'égalité des triangles que contient le premier livre des éléments. »

S'il est vrai que les conjectures d'un homme de génie sont comme un pressentiment de la vérité, il y avait à perfectionner le langage mathématique, en n'y employant aucun terme qui n'eût été défini, pour procéder ensuite à la recherche d'une bonne définition de la ligne droite ; cette définition devait être telle qu'on pût en déduire, par voie démonstrative, la proposition que *la droite est le plus court chemin entre deux points*, ainsi que les postulats qui la complètent : *entre deux points on ne peut tirer qu'une ligne droite ; quand deux portions de droites coïncident, les droites elles-mêmes coïncident dans toute leur étendue.*

Un premier pas important était fait, si l'on établissait l'absurdité d'un nombre *déterminé* de plus courts chemins entre deux points. Or, si

entre les deux points A et B il existe un nombre *déterminé* de ces plus courts chemins, il doit en exister le *même* nombre entre les points C et B quelconques de l'un d'entre eux; ce qui détruit l'hypothèse (1). Quant au principe qui justifie ce raisonnement, il domine la géométrie entière et les autres sciences; c'est l'*homogénéité*, c'est-à-dire, cette propriété de l'espace scientifique de pouvoir être indéfiniment et indifféremment divisé en parties semblables. Trouver ce principe, c'était trouver, en même temps, que la ligne droite est une *ligne homogène*, que le plan est une *surface homogène*.

En partant de cette notion de l'espace, du plan et de la droite, de celles de la grandeur et de la forme qui en furent une conséquence, il était assez facile de déduire les théorèmes élémentaires concernant la ligne droite, le plan et la similitude; mais il restait encore à lever les difficultés qui entourent la théorie du parallélisme, et à trouver une bonne définition des parallèles.

Toutefois l'induction pouvait faciliter la solution de ce nouveau problème. Les définitions nouvelles de la droite et du plan une fois ac-

---

(1) Voir la note de la page 77, 3e exemple.

quises, en recherchant en quoi elles l'emportaient sur les définitions ordinaires, on devait être sur la voie des règles de la *définition géométrique*. Ce travail tout critique mit en évidence le caractère *génétique* des définitions nouvelles, et l'absence de ce caractère dans les définitions anciennes, ainsi que dans celle des parallèles. Le problème comportait dès-lors un énoncé plus précis : Quel est le moyen général d'engendrer les parallèles?

Le rôle que le parallélisme joue dans la théorie de la similitude, conduisait naturellement à l'idée d'engendrer les parallèles comme on engendre les figures semblables, c'est-à-dire les figures *qui ont même forme ou qui ne diffèrent qu'en grandeur*. Or, le procédé générateur s'offrait ici pour ainsi dire de lui-même : c'était la majoration ou la minoration de l'espace. En effet, si d'un point quelconque, on se met à agrandir ou à rétrécir l'espace, toute droite qu'il renferme s'y meut parallèlement à elle-même. Les parallèles pouvaient donc se définir : *des droites semblablement placées dans l'espace*. Mais, l'espace étant homogène, deux droites quelconques y occupent des positions semblables. Il était donc nécessaire de prendre une position fixe pour point de comparaison.

La position variable de la droite autour d'un de ses points en fut la *direction*, et la théorie des parallèles fut définitivement constituée.

C'est sur ces principes que nous avons basé la démonstration vainement cherchée jusqu'à présent des postulats. Ils permettent en outre de simplifier considérablement la théorie de la similitude en général.

Cet ouvrage peut-il avoir un intérêt didactique? Dans notre pensée, oui. Si les principes que nous émettons, et par suite les démonstrations auxquelles ils servent de base, étaient plus obscurs que les choses à démontrer, nous aurions manqué notre but. Toute solution non pratique d'une difficulté élémentaire n'en est pas une à nos yeux (1).

Depuis plusieurs années déjà nous étions en possession des idées purement mathématiques que nous venons d'exposer (2). Les questions

(1) Ce n'est pas à dire toutefois que, dans l'enseignement, on ne doive, en certains cas, différer l'exposition des principes d'une science, et la réserver pour le moment où l'élève est déjà plus ou moins familiarisé avec le sujet dont elle traite. C'est là une tout autre question. Ainsi, pour ne pas sortir du sujet qui nous occupe, on pourrait rejeter à la fin du cours de géométrie la démonstration des principes de la similitude, de l'isogénéité et de l'homogénéité, mais dès l'abord se servir de leurs conséquences, c'est-à-dire les appliquer.

(2) Nous avions même écrit quelques articles à ce sujet dans les *Annales de l'Enseignement public*, publiées à Verviers, année 1857.

philosophiques qu'on peut soulever à l'occasion de la méthode et de la certitude des sciences nous préoccupaient en même temps ; et, dans notre esprit, nous avions uni nos recherches sur les principes de la géométrie, et celles sur les principes fondamentaux des sciences humaines. Cependant ce n'était nullement notre intention, si nous donnions la solution des postulats, de nous étendre autant que nous le faisons aujourd'hui, sur les questions philosophiques. Mais plus tard en prenant connaissance d'une courte dissertation du savant docteur Ueberweg, dissertation conçue sous ce double point de vue, nous avons cru devoir suivre aussi cette marche. De là vient que la partie philosophique, générale et spéciale, tient une place considérable dans notre ouvrage, tandis que la partie qui traite des postulats, ne sert pour ainsi dire qu'à confirmer celle-là.

L'idée fondamentale en est bien simple.

Dans le groupe des sciences dites positives, on distingue communément les sciences inductives et les sciences déductives. Parmi ces dernières, on range spécialement les mathématiques. Seulement, d'un côté, il y a controverse sur le point de savoir si la mécanique fait ou non partie

de ces sciences; et de l'autre, on croit devoir réserver une place à part à l'arithmétique et à l'algèbre en tant qu'elles n'ont pas besoin, prétend-on, d'axiomes ni de postulats. Ce sont ces distinctions que nous avons eu pour but de mettre à néant. Nous avons cherché à montrer que les sciences positives procèdent toutes d'une manière uniforme. L'*observation* leur fournit les données; par *induction* on s'élève à un *principe hypothétique* d'où l'*expérience scientifique* tire des conséquences ; c'est l'expérience qui sert proprement à édifier la science. La certitude de la science découle de la légitimité logique de sa méthode — c'est la certitude subjective — et de l'accord de ses résultats avec les faits observés — c'est la certitude objective. La science est vraie quand ses hypothèses sont à la fois subjectives et objectives (1).

Tout problème philosophique, quelque restreint qu'il paraisse, a cependant, en général, une très-haute portée, et se trouve dans d'intimes rapports avec d'autres questions plus graves. On

(1) Nous avons employé quelques termes logiques, tels que ceux d'*hypothèses*, de *description*, de *définition génétique*, etc., dans un sens quelquefois un peu différent du sens ordinaire. Nous n'avons pas cru devoir motiver ces changements parce qu'ils ne nous ont pas semblé apporter d'obscurité dans le raisonnement.

pourrait se demander ici si les sciences morales et philosophiques ont à suivre la même marche que les sciences dites positives. Il en est parmi elles, et la psychologie est de ce nombre, qui admettent sans contredit les mêmes principes. Mais il en est d'autres, la métaphysique, par exemple, où, semble-t-il, ils ne conviendraient plus. Et tout d'abord les métaphysiciens diffèrent beaucoup des savants proprement dits. Ceux-ci ne proposent leur théorie qu'avec circonspection ; ils la donnent comme un premier jet susceptible d'être amélioré ; et, si la forme du système, si l'édifice est vicieux, du moins le fond subsiste, les matériaux peuvent encore servir. Les systèmes des métaphysiciens s'annoncent toujours, au contraire, comme étant toute la vérité, et pourtant ne vivent qu'un jour ; et généralement de tous les fils dont ils se composent, il n'en reste pas qui puissent servir à tisser une toile nouvelle. Leur vanité les a fait comparer à des bulles de savon ou à des toiles d'araignée, et c'est la cause principale de la déconsidération où est tombée aujourd'hui la métaphysique. Il s'est même produit une école, l'école positive dont M. Comte est le fondateur, qui la regarde comme le rêve d'une intelligence sortant à peine de l'en-

fance : ce qu'elle poursuit ne serait qu'un fantôme créé par elle. Ce serait pourtant un des plus grands *faits* dont l'école positive aurait à rendre compte, que cette illusion qui dura quatre mille ans, et qui fit chercher à l'homme la solution d'une question qui n'était pas posée.

Mais ces attaques, auxquelles la métaphysique est en butte, ne prouvent qu'une chose : c'est que leurs auteurs ne se faisaient pas une juste idée de l'objet de la métaphysique.

On ne s'avise pas de nier l'astronomie, car on ne peut nier les corps célestes ni la possibilité d'expliquer leurs mouvements. On ne peut nier l'anthropologie, vu que l'homme existe, et que son existence est l'objet d'un problème, comme toute existence. Quel est donc l'objet, quel est le but de la métaphysique ?

La science a pour objet l'univers, mais l'univers en tant qu'intelligible. L'univers intelligible est l'expression révélée à la conscience d'un rapport entre le moi et le non-moi. C'est une série qui exprime une fonction inconnue. Y a-t-il possibilité de connaître les termes du rapport? Tel est le problème que se pose le métaphysicien. On peut, comme Kant, tout en reconnaissant qu'il y a un problème posé, prétendre qu'il est inso-

luble. On déclare ainsi la métaphysique impuissante à atteindre son but. Quel est ce but ? C'est d'expliquer les choses (y compris l'homme et sa pensée) et leur intelligibilité par une hypothèse (1) suprême — panthéisme, pancosmisme, dualisme, identité, création —; et le critérium du système serait son accord avec les faits observés, en supposant établie la légitimité absolue de ce critérium.

Quelque incomplétement qu'ait dû être exposée dans cet ouvrage tout spécial l'idée métaphysique qui lui sert de base, il est facile cependant de voir qu'également éloignée des deux extrêmes, le réalisme et l'idéalisme, elle cherche à les concilier tous deux.

Les sensualistes prétendent, soit, avec Hume, que les principes de la raison sont des inductions tirées illégitimement de la matière empirique, et que les résultats de la science n'ont jamais qu'une autorité usurpée et une valeur provisoire; soit, avec Mill, que l'induction est un procédé souverain et incontestable qui, bien employé, donne aux observations empiriques un caractère évident.

(1) Ce mot étant pris dans le sens étymologique, déjà signalé, de *principe à la fois subjectif et objectif.*

D'un autre côté, les Cartésiens pensent que l'intelligence humaine contient à l'état d'enveloppement les principes absolus que le contact du monde vient développer. Ainsi le gland contient en germe le chêne que la terre, la chaleur et l'humidité en feront éclore. L'intelligence développée est, de cette façon, en harmonie avec les phénomènes. Mais l'action de ceux-ci est en réalité complétement inexplicable, au point que Leibnitz finit par la supprimer, côtoyant à la fois l'idéalisme subjectif et le panthéisme.

Quoi que l'on fasse, le mysticisme est au bout de cette doctrine, comme le scepticisme est au bout de l'autre.

Enfin Kant crut avoir trouvé la solution définitive du problème dans une conciliation dont la vraie portée ne lui échappa point, et qui était au fond une réforme de la science. Il prétend en effet que l'intelligence, armée de toutes pièces, impose son empreinte au monde extérieur en tant que perçu par les sens, de manière que les découvertes de l'expérience ne sont que des reflets des lois immuables de notre esprit. Kant conservait donc les deux termes du problème ; il admettait même leur rapport ; mais ce rapport, d'après lui, reste inconnu à la conscience. Il re-

connaissait par là ne pouvoir déterminer la part de ce *noumène* mystérieux dans la formation de nos connaissances ; il s'interdisait même d'en parler, et, par suite, ouvrait de nouveau la porte aux solutions exclusives qui, tout en restant sur le terrain du criticisme, ont détruit le problème en le simplifiant.

Schelling et, après lui, Hegel ont placé la vérité dans le rapport lui-même, ou dans la loi du rapport. Leurs systèmes célèbres, qui ne comptent plus aujourd'hui que de rares adhérents, ont pourtant mis en lumière une grande vérité, c'est que l'idéal est la seule réalité ; en d'autres termes, que tout ce qui est réel est rationnel, que tout ce qui est rationnel est réel. Malheureusement on poussa ce principe jusqu'à l'abus ; et il en résulta un échafaudage dont les matériaux n'étaient, en grande partie, que des acquisitions de l'expérience, et que l'on donnait cependant comme construit à priori. Aussi croula-t-il aussitôt. Devait-on en revenir à l'empirisme pur et simple, comme on l'a fait en Allemagne, et, prenant à contre-pied la doctrine du maître, s'écrier que le fait brutal contient toute idéalité? Faut-il prendre en mépris la métaphysique et prononcer contre elle un verdict de stérilité et d'impuissance? C'est

l'effet naturel de toute réaction. Ne faut-il pas plutôt, sans pourtant tomber dans l'éclectisme, se rappeler que la vérité et l'erreur existent presque toujours en même temps dans les ouvrages des hommes, que chaque système a son côté vrai, et que la marque d'un bon esprit est de chercher à le dégager du faux qui l'entoure?

Il n'est pas étonnant d'ailleurs que, devant un problème aussi ardu que celui de la métaphysique, les plus belles intelligences viennent se briser. Si, tout en obéissant à leur nature raisonnable et libre qui réclame impérieusement une solution, elles ont échoué, loin de leur jeter le mépris et le ridicule, on doit les admirer de l'avoir tentée. Une défaite n'est pas toujours honteuse.

Quant à nous, nous ne nous sommes attaché qu'à un point secondaire, mais nous avons cherché à l'éclairer. Si nous avons réussi, peut-être nous sera-t-il permis alors de faire à d'autres points isolés de la science l'application de la même méthode toute scientifique. Disons toutefois que nous voyons dans l'intelligence simplement une force synthétique qui tend vers l'unité, vers l'*uniformation* (si l'on peut risquer ce mot) des phénomènes. Elle éprouve un besoin

de transformer le monde varié des *perceptions* en un *univers* de *conceptions*; les rapports accidentels, fortuits, en lois générales, vraies partout et toujours; le *post hoc* en *propter hoc*; la *matière* changeante en la *substance* invariable. D'un côté, dans le monde des perceptions, les jugements synthétiques sont le produit d'une induction plus ou moins hardie, plus ou moins contestable; l'attribut reste en dehors du sujet, ne fait, pour ainsi dire, que l'habiller. De l'autre, dans l'univers des conceptions, les jugements sont analytiques: l'attribut d'abord empirique, est transformé en caractère essentiel, et sert à définir le sujet.

Peut-être cette distinction si simple permettrait-elle de résoudre le problème des antinomies. Peut-être l'espace n'apparaît-il comme divisible à l'infini, le temps comme n'ayant jamais commencé, les causes comme étant toujours des effets de causes supérieures, que dans l'univers scientifique, dans cet univers où tout est défini, étiqueté, numéroté, casé; tandis que les données empiriques revêtiraient des caractères tout opposés, que le monde des perceptions présenterait purement le fait, toujours le fait, sans lien avec ce qui le précède et ce qui le suit, si ce n'est un lien tout fortuit de juxtaposition et de succession.

Mais ce n'est pas le lieu de traiter cette question vitale de la métaphysique, question bien autrement ardue que celle des postulats, au point que les philosophies récentes font de cette antithèse la loi de l'intelligence, le signe d'un antagonisme irréconciliable entre l'entendement et la raison (1).

Après ces quelques mots, que nous n'avons écrits que pour fixer la véritable portée du second chapitre du premier livre, il ne nous reste plus qu'à chercher notre excuse dans la nature mixte du sujet, si nous avons quelquefois été trop métaphysicien pour les savants, trop mathématicien pour les philosophes.

De plus, comme il est difficile aujourd'hui de connaître tous les ouvrages qui ont paru sur une même question, nous réclamerons l'indulgence pour le cas où, à notre insu, nous aurions donné pour nôtre une idée déjà émise. C'est ainsi que nous avions terminé notre travail sur les postulats, sans nous douter que MM. Erb (1846) et Ueberweg (1851) avaient écrit sur le même sujet, et nous avaient devancé dans quelques-unes de nos critiques, celle, entre autres, de la

---

(1) Voir *la Métaphysique et la Science*, par Et. Vacherot, Paris 1858.

définition du plan. Nous oserons toutefois appeler l'attention sur l'ensemble de nos définitions, nouvelles, croyons-nous, pour la plupart, et précises, autant qu'il nous a été possible. Nous n'avons pas dissimulé nos prétentions. Nous avons visé à donner à ces définitions la rigueur scientifique, et en même temps nous avons voulu qu'elles répondissent à l'intuition que l'on a de la chose définie. C'est mettre en main à la critique une double mesure pour les apprécier.

Avant de terminer nous avons à dire quelques mots de la traduction qui se trouve à la fin de l'ouvrage. La dissertation de M. Ueberweg, d'abord imprimée dans les *Archives pédagogiques*, nous avait été communiquée par l'auteur lui-même, et nous y avions fait quelques remarques. Quand nous nous sommes décidé à faire imprimer notre ouvrage, nous avons obtenu de M. Ueberweg l'autorisation de traduire le sien, et il a bien voulu écrire une nouvelle introduction où il rencontre quelques-unes de nos objections. De même dans la critique que nous faisons de la théorie de cet auteur, nous réfutons quelquefois des arguments apportés par lui, mais qui ne l'étaient pas dans la dissertation

primitive. Le lecteur pourra du reste, par la comparaison des deux éditions du même ouvrage, juger de ces modifications (1).

D'un autre côté, nous avons supprimé dans la traduction, et du consentement de l'auteur, quelques démonstrations rigoureuses, mais un peu longues, qui empêchaient de saisir facilement la marche et l'esprit général de l'œuvre. Nous devons à la vérité de dire que beaucoup de nos idées ont été éveillées par les siennes. Nous reconnaîtrons la même influence à l'ouvrage de Mill sur la *Logique Inductive*. Enfin, qu'il nous soit permis d'acquitter ici notre dette de reconnaissance envers feu A. Meyer, professeur de haute analyse à l'Université de Liége, qui nous a aidé de ses lumières pour la partie mathématique, et envers le savant professeur de philosophie au même établissement, M. Leroy, dont les conseils judicieux nous ont été de la plus grande utilité, pour le plan comme pour les détails de notre ouvrage.

(1) L'une des plus importantes est celle qui a trait à la III[e] Expérience. L'auteur, en effet, a renoncé à démontrer que dans le corps qui tourne autour de deux points fixes, il y a une ligne continue de points immobiles.

PROLÉGOMÈNES PHILOSOPHIQUES

DE

LA GÉOMÉTRIE

ET

SOLUTION DES POSTULATS.

DIVISION DE L'OUVRAGE.

La géométrie peut donner lieu à plusieurs ordres de questions philosophiques.

D'abord elle est *une science;* et, à ce titre, elle est intéressée dans les problèmes qui sont soulevés à l'occasion de la méthode et de la certitude de la science en général.

Ensuite elle est *cette science*, et, comme telle, elle part de principes à elle propres, qu'il faut énumérer, déterminer, et analyser.

Enfin, il est en géométrie des propositions qu'on regarde comme vraies, et dont on a cherché en vain la démonstration. Quelle est la raison de ce fait? Y a-t-il une démonstration? Quelle peut-elle être?

Ainsi s'explique la division de cet ouvrage en trois livres :

LIVRE I. L'unité dans la science.

LIVRE II. Principes purs de la géométrie.

LIVRE III. Critique générale et solutions.

LIVRE PREMIER.

L'UNITÉ DANS LA SCIENCE.

Quels sont les rapports d'une science donnée avec les autres sciences ? Pour la plupart d'entre elles la solution se présente d'elle-même ; pour les mathématiques, au contraire, cette question attend encore une réponse définitive. C'est cette réponse que nous allons essayer de donner.

Nous divisons ce livre en deux chapitres :

Le premier renferme l'exposé succinct des théories diverses qui ont été émises sur la science en général et sur les mathématiques en particulier; dans le second nous exposons une théorie, nouvelle en partie, sur l'unité du principe d'où dérivent nos connaissances.

CHAPITRE Ier.

ETAT DE LA QUESTION.

Ce chapitre se divise en trois paragraphes :

Dans le premier, nous nous occupons de ces théories qui font des mathématiques des sciences à part, ayant des principes et une certitude autres que les autres sciences.

Dans les paragraphes suivants, nous examinons les deux théories principales qui ramènent les mathématiques dans le cercle de nos autres connaissances, et ne mettent entre les unes et les autres qu'une différence secondaire.

§ 1. — THÉORIE DES APRIORISTES.

S'il est une division des sciences qui ait rallié un grand nombre de penseurs, c'est sans contredit la division en sciences théoriques ou à priori, et en sciences expérimentales ou à posteriori ; et parmi les premières les sciences mathématiques et particulièrement la géométrie ont toujours tenu le premier rang. Les partisans des idées innées, Leibnitz à leur tête, apportaient toujours les principes de ces sciences à l'appui de leur opinion, et on alla même jusqu'à prétendre que l'esprit humain, par la seule force de sa pensée, sans le secours de l'expérience et de l'observation, pouvait dé-

couvrir l'ensemble des vérités mathématiques. Le fondateur de la philosophie moderne, Kant s'est aussi basé sur cette distinction pour établir son système. Concluant de l'apodicticité des propositions mathématiques à leur apriorité, il commence, avant de passer à la question : comment la métaphysique est-elle possible? par se demander comment les mathématiques pures sont possibles. D'après lui, cette possibilité ne peut s'expliquer que si l'on admet la subjectivité absolue des idées d'espace et de temps, comme formes de notre sensibilité, appliquées par nous aux phénomènes. La chose en soi, la chose qui agit sur nous est au-dessus de nos moyens de connaître; ce que nous voyons d'elle n'en est qu'une apparence dont nous avons fait tous les frais. Par là s'explique l'universalité des lois mathématiques; si le monde nous les montre partout réalisées, c'est que nous formons ce monde à notre image, nous nous le figurons dans le temps et dans l'espace, nous nous y retrouvons nous-mêmes. Aux yeux de Kant, cette théorie peut seule résoudre toutes les difficultés.

« Le temps et l'espace, dit-il, sont donc deux sources d'où peuvent être dérivées à priori différentes connaissances synthétiques, comme les mathématiques pures principalement en donnent un exemple frappant relativement aux connaissances de l'espace et de ses rapports. Le temps et l'espace pris ensemble sont deux formes pures de toute intuition sensible, et rendent par là possibles les propositions synthétiques à priori. Mais ces sources de connaissances à priori, par ce fait seul qu'elles sont de simples conditions de la sensibilité, se posent à elles-mêmes leurs bornes, en ce sens qu'elles se rapportent purement aux objets considérés comme phénomènes, mais non point aux choses en

elles-mêmes. Les phénomènes sont le seul champ de la valeur de l'espace et du temps; si l'on en sort, plus aucune valeur objective n'est possible par eux. Cette réalité formelle de l'espace et du temps ne porte du reste aucune atteinte à la connaissance expérimentale; car nous en sommes également certains, que ces formes adhèrent nécessairement soit aux choses en elles-mêmes, soit seulement à l'intuition que nous en avons. Ceux, au contraire, qui soutiennent la réalité absolue de l'espace et du temps, qu'ils les prennent comme substances, ou simplement comme modifications, sont en contradiction avec les principes de l'expérience; car ils sont obligés, s'ils prennent le temps et l'espace pour des choses en soi (et c'est le parti que prennent la plupart des physiciens-mathématiciens), d'admettre deux non-êtres éternels et infinis (l'espace et le temps), qui n'existent (sans être cependant quelque chose de réel) que pour comprendre dans leur sein tout ce qui est réellement. S'ils prennent le second parti, celui de rattacher aux choses l'espace et le temps, comme le font quelques physiciens-métaphysiciens, pour qui l'espace et le temps sont des rapports des phénomènes (voisins dans l'espace ou successifs dans le temps) abstraits de l'expérience, quoique confusément représentés dans cet état de séparation, alors ils doivent attaquer la validité des sciences mathématiques à priori par rapport aux choses réelles (v. g. dans l'espace); au moins doivent-ils en contester la certitude apodictique, puisqu'elle n'a pas lieu à posteriori, et que les idées d'espace et de temps à priori sont, suivant cette opinion, de pures créations fantastiques, dont la source réelle doit être cherchée dans l'expérience, puisque c'est avec des rapports abstraits de l'expérience

que l'imagination a composé quelque chose qui comprend, à la vérité, ce qu'il y a de général dans ces rapports, mais qui ne peut avoir lieu sans les restrictions que la nature y attache. Les premiers ont, à la vérité, l'avantage de rendre aux mathématiques le champ des phénomènes libre; mais si l'entendement vient à vouloir sortir de ce champ, ces conditions mêmes, considérées comme substances certaines (l'espace et le temps), les embarrassent fort. Les seconds gagnent, il est vrai, sous ce dernier rapport, en ce que les représentations d'espace et de temps ne les entravent pas quand ils veulent juger des objets, non comme phénomènes, mais simplement par rapport à l'entendement. Mais ils ne peuvent ni donner un fondement à la possibilité des connaissances mathématiques à priori (puisqu'il leur manque une intuition à priori vraie et valable objectivement), ni former un système nécessaire des lois de l'expérience et des principes mathématiques. Dans notre théorie sur la véritable nature de ces deux formes primitives de la sensibilité, ces deux difficultés disparaissent (1). »

Une autre opinion, tout en admettant la théorie de Kant sur l'apriorité, reconnaît en même temps la réalité objective de l'espace et du temps, et se trouve obligée de supposer entre nous et les choses une harmonie préétablie, mettant en rapport le sujet connaissant et l'objet connu, « par une suite non interrompue de miracles. » (2)

(1) Kant, *Crit. de la raison pure; Esth. transc.*, § VII, trad. de Tissot, t. I, p. 89 et suiv.

(2) Voir, pour l'exposé et la réfutation de cette opinion et de celle de Kant, la dissertation de M. Ueberweg, à la fin de cet ouvrage.

Sans nous attacher à la réfutation des systèmes de ces philosophes, fesons remarquer que leur solution n'en est pas une, qu'ils ne font que reculer la difficulté au lieu de la résoudre, et la placer en nous au lieu de la mettre dans les choses. Comme les Grecs, qui, pour expliquer le cours perpétuel de leurs fleuves, imaginaient près de la source un dieu qui versait de son urne une onde intarissable, sans se demander où il allait la puiser, de même, pour expliquer l'apodicticité des lois géométriques, la manière dont elles s'imposent à nous comme nécessaires, ces philosophes en font les lois de notre nature, les propriétés innées de notre âme, les formes de notre sensibilité, de nos relations avec les choses, sans nous dire pourquoi ce sont précisément les idées de la géométrie qui nous sont innées. En d'autres termes, leur solution laisse place à un nouveau *pourquoi*. Nous verrons d'ailleurs bientôt combien cette théorie est impuissante et quelles armes elle prête à ses adversaires.

Cependant le fait de la distinction entre sciences à priori et sciences à posteriori, est accepté par un grand nombre de géomètres, d'hommes de sciences, qui ne s'enquièrent pas de la source de cette distinction, ou du moins, qui ne lui donnent pas pour fondement une théorie philosophique complète. C'est ainsi que Montferrier (1) en trouve l'origine dans l'idée de l'infini, et n'est pas trop éloigné de croire que les autres sciences jouiront un jour des mêmes avantages.

« Cette certitude absolue qui accompagne les propositions mathématiques, dit-il, manque *encore* aux autres sciences, qui cependant doivent être liées entre elles

(1) *Dictionnaire des sciences mathématiques.* — Bruxelles, 1838.

dans la raison humaine comme les déductions d'un seul et même principe intellectuel. Ainsi de nos jours encore plusieurs mathématiciens, *confondant la science même avec les objets sur lesquels elle s'exerce*, prétendent vainement la faire descendre du haut rang qu'elle occupe dans l'intelligence, jusqu'à celui des connaissances pratiques, obtenues par l'observation, et la renfermer tout entière avec sa puissance universelle, dans le cercle borné d'une simple méthode empirique. Erreur étrange et vraiment inconciliable avec les progrès des mathématiques, qui n'ont pu s'effectuer sans que la considération de l'INFINI n'entrât comme élément nécessaire dans toutes les propositions élevées de la science. Cette nécessité de l'abstraction, qui se rencontre dans toutes les constructions mathématiques, établit d'une manière incontestable la spiritualité du principe d'où la science découle. »

D'après M. Comte (1) « dans l'état actuel du développement de nos connaissances positives, il convient de regarder la science mathématique, moins comme une partie de la philosophie naturelle proprement dite, que comme étant, depuis Descartes et Newton, la vraie base fondamentale de toute cette philosophie, quoique, à parler exactement, elle soit à la fois l'une et l'autre. » Il distingue dans cette science deux branches, la mathématique abstraite, ou le *calcul*, comprenant l'arithmétique et l'algèbre, et ce qu'on nomme généralement haute analyse, c'est-à-dire calcul différentiel et intégral, calcul des variations et calcul des différences; et la mathématique concrète, qui se compose de la géométrie

---

(1) *Cours de philosophie positive*. — Paris, 1830. t. Ier. *Exposition*.

générale, et de la mécanique rationnelle. Ces deux dernières sciences sont fondées, comme toutes les sciences naturelles, sur l'observation, quoique, vu l'extrême simplicité de leurs phénomènes, elles comportent un degré plus parfait de systématisation ; mais elles ont ceci de particulier que, dans l'état présent de l'esprit humain, elles sont employées beaucoup plus comme méthode que comme doctrine. Quant à la mathématique abstraite, M. Comte n'y voit qu'une « *immense extension admirable de la logique naturelle à un certain ordre de déductions*, » et en exclut ainsi toute donnée empirique, même la notion de grandeur. La mathématique concrète s'occupe de la recherche des fonctions, et l'autre du calcul de ces mêmes fonctions, de la résolution des équations que la première a fournies. Cette division, malgré sa précision apparente, est atteinte d'un vice radical; c'est qu'il n'y a pas de question, fût-elle de l'arithmétique élémentaire, qui ne se ramène à une recherche de fonctions : chercher une formule générale pour les nombres premiers, rechercher quelles relations existent entre les constantes et les racines d'une équation, sont des problèmes qui devraient, ce semble, ressortir à la partie concrète; et il serait facile d'y faire rentrer toute question un peu générale que l'on se poserait sur les quantités.

M. Comte est, du reste, très-peu explicite sur le point de savoir quels sont les principes fondamentaux de la géométrie qui nous sont fournis par l'observation. Il parle bien de l'espace géométrique, qui n'est qu'un milieu indéfini que nous regardons comme contenant tous les corps de l'univers, et que nous nous représentons spontanément « comme analogue au milieu effectif dans

lequel nous vivons; » il dit quelques mots sur les diverses espèces d'étendue, *volume*, *surface*, *ligne* et *point*, mais sans s'étendre beaucoup sur l'origine de ces idées et leur formation en nous.

On voit, par ce qui précède, que M. Comte ne peut guère être rangé au nombre des partisans de la division des sciences en deux grandes catégories, et, en effet, il est le chef de l'école qui, avec Mill, ne reconnaît que des sciences inductives. Mais, avant de parler de l'empirisme et du sensualisme en général, disons un mot de ceux qui, prenant le contrepied de ces systèmes, font de toutes nos connaissances des connaissances déductives. Les uns et les autres suppriment la division de la science humaine et lui rendent l'unité qui en est certainement l'apanage. Mais sur le terrain même de la géométrie, les absolutistes se rencontrent avec les partisans des idées innées et se trouvent devant des difficultés sérieuses. D'où vient cette proposition : l'espace a trois dimensions ? S'il est une affirmation qui se présente comme l'expression d'un fait, qui porte les caractères de l'objectivité, c'est bien celle-là. Pour Kant, il est vrai, les trois dimensions de l'espace sont données dans l'intuition même ; mais Leibnitz et les géomètres ne sauraient faire de cette proposition ni une définition de l'espace, puisqu'il n'y a pas équivalence entre le sujet et les prédicats, ni un axiome ou un postulat, puisqu'elle ne sert pas à l'enchaînement des théorèmes. Quant à Hegel, il retrouve dans ce fait les trois moments de toute idée, thèse, antithèse et synthèse, et comme l'espace est l'idée générale de la nature, abstraction faite de toute détermination, et à ce titre indifférente, les trois dimensions sont égales et peuvent se prendre l'une pour l'autre.

Quoi qu'il en soit de cette démonstration qu'il est assez difficile de prendre au sérieux, la véritable pierre d'achoppement de tous les systèmes qui précèdent, ce sont les *postulats*. On sait qu'on entend généralement par là, des propositions regardées comme évidentes par elles-mêmes quoique à un degré moindre que les axiomes. Dans la géométrie, telle qu'on l'enseigne, ils sont au nombre de trois qu'on ramène quelquefois à deux. Ce sont les suivants :

1. Entre deux points on ne peut tirer qu'une seule ligne droite ; ou encore :

Deux lignes droites ne peuvent renfermer aucun espace.

2. Quand deux portions de droites coïncident, les droites elles-mêmes coïncident dans toute leur étendue ; ou encore :

Une droite ne peut se bifurquer.

3. Par un point on ne peut mener qu'une parallèle à une droite ; ou encore :

Deux droites qui font des angles inégaux avec une même troisième dans un même plan se rencontrent.

Nous établirons que les propositions indémontrées de la géométrie sont en nombre beaucoup plus considérable ; pour le moment, il nous suffit qu'il en existe.

Or, que ces propositions ne soient pas des axiomes au même titre que celles-ci : Le tout est plus grand que la partie ; deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles, etc., c'est ce que prouvent les essais de démonstration que les géomètres ont si souvent tentés et qui sont toujours restés sans résultat ; ce nom même de *postulats* dont Euclide, et beaucoup d'autres après lui, les désignent particulièrement ; leur caractère analogue à celui d'autres propositions

qui sont incontestablement des théorèmes, telles que : par trois points on ne peut faire passer qu'un cercle; quand deux côtés de deux triangles coïncident respectivement (par l'égalité des angles compris) les troisièmes côtés coïncident aussi; par un point on ne peut mener qu'une perpendiculaire à une droite, etc.

Kant voit dans les postulats les conditions de l'intuition à priori. « J'appelle quantité extensive, dit-il, celle dans laquelle la représentation des parties rend possible celle du tout (et par conséquent la précède nécessairement). Je ne puis me représenter une ligne, si petite qu'elle soit, sans la tirer par la pensée, c'est-à-dire, sans en produire successivement toutes les parties d'un point à un autre, et sans, par là, rendre enfin sensible cette intuition. Il en est de même de toutes les parties du temps, même de la plus petite. Je n'y pense que par la progression successive d'un instant à un autre, d'où résulte enfin, au moyen de toutes les parties du temps et de leur addition, une quantité de temps déterminée. Puisque la simple intuition dans tous les phénomènes est ou l'espace ou le temps, tout phénomène est, comme intuition, une quantité extensive, par la raison qu'il ne peut être connu dans l'appréhension que par la synthèse successive de partie à partie. Tous les phénomènes sont donc perçus d'abord comme aggrégats (multitude de parties données primitivement), ce qui n'arrive pas toujours dans toute espèce de quantité, mais seulement pour celles qui nous sont représentées et qui sont appréhendées par nous extensivement comme telles.

Sur cette synthèse successive de l'imagination productive dans la création des figures, se fondent les mathématiques de l'étendue (la géométrie) avec leurs

axiomes, qui expriment les conditions de l'intuition sensible à priori, sous lesquelles seules le schème d'un concept pur d'une intuition extérieure est possible, par exemple : entre deux points il n'y a qu'une seule ligne droite possible; deux lignes droites ne renferment aucun espace. Ce sont là des axiomes qui ne concernent proprement que les grandeurs (*quanta*) comme telles (1). »

Whewell, en dépit d'un grand nombre de géomètres qui voient dans ces postulats des théorèmes jusqu'ici récalcitrants, en veut faire des axiomes, des propositions évidentes par elles-mêmes. Mais Kant et Whewell devraient dresser le catalogue complet et rationnel de ces axiomes, et indiquer le caractère spécifique qui les distingue des théorèmes. L'évidence d'un côté, les conditions de l'intuition de l'autre, étant des criteriums tout subjectifs, quel est, dans leurs systèmes, le théorème qu'on ne pût ériger en axiome?

Ils donnent par là beau jeu aux sensualistes et aux empiristes qui soutiennent contre eux l'origine empirique de toutes nos connaissances : ceux-ci voient, dans les propositions des mathématiques, des vérités expérimentales et contingentes, que l'habitude nous fait regarder comme absolues et nécessaires, parce que nous les voyons se confirmer tous les jours; et, il faut bien le reconnaître, s'il était prouvé que les postulats jusqu'ici indémontrés sont indémontrables, les empiristes auraient raison.

Cette opinion très-ancienne, renversée d'abord par Leibnitz et sa théorie des idées innées, reprise par les

---

(1) Kant, *Crit. de la raison pure*, liv. II; *Axiomes de l'Intuition*, trad. de Tissot, t. I, p. 242 et suiv.

philosophes du XVIII[e] siècle, réfutée de nouveau par Kant, puis relevée par Comte, Mill, Opzoomer, et les matérialistes proprement dits, Vogt, Moleschott, Büchner, est maintenant l'une des plus accréditées, et plusieurs philosophes, sans adopter dans ses principes la doctrine des empiristes, sont assez disposés à l'admettre en ce qui touche les axiomes mathématiques (Voir M. Ueberweg, introduction à la dissertation traduite à la fin de cet ouvrage). C'est Mill qui, dans sa *Logique des sciences inductives*, a défendu cette opinion avec le plus de talent. Nous allons exposer fidèlement les arguments de cet auteur, en les fesant suivre de quelques remarques.

§ 2. — THÉORIE DES EMPIRISTES.

L'induction, dit Mill, est le fondement de toutes nos connaissances. D'où vient alors cette certitude indépendante de l'expérience, que tous les philosophes reconnaissent aux mathématiques?

C'est une illusion provenant de ce que les objets dont elles s'occupent sont imaginaires, et aussi de ce que leurs déductions s'appuient en partie sur des définitions adéquates : ce qui paraît être déduit avec évidence d'une définition, repose proprement sur la supposition qu'une chose correspond à cette définition; supposition fausse : car il n'y a ni point sans grandeur, ni ligne sans largeur, ni cercle parfait, ni carré parfait, etc.; bien mieux, l'existence même de ces figures est, autant que nous pouvons l'affirmer, incompatible avec la constitution physique de notre globe. On répond que ces notions existent *à priori* dans notre esprit. Malgré les autorités qui défendent cette opinion,

Mill croit qu'il n'en est rien; ces idées ne sont que les copies des points, lignes, etc., que nous fournit le monde extérieur, *des abstractions* obtenues à l'aide de la faculté que nous avons de diriger notre attention sur un point particulier. Nous ne pouvons même nous représenter une ligne sans largeur. Si donc il n'existe pas d'objets correspondant aux définitions de la géométrie; si, d'un autre côté, on ne peut admettre que la géométrie s'occupe de non-êtres, il faut bien considérer les lignes et les figures comme des généralisations (1) des objets de l'expérience. « Que tous les diamètres d'un cercle soient égaux, cela est vrai de tous les cercles en tant que cela l'est d'un seul; mais en réalité, cela ne se peut dire d'aucun cercle; seulement, c'est assez approché, pour que, dans la pratique, *on puisse, sans erreur sensible, considérer ces diamètres comme*

(1) Il y a ici confusion : la ligne géométrique n'est pas la *généralisation* des lignes que nous fournit l'expérience ; la *ligne en général* a une largeur et une épaisseur *quelconques*; elle n'est pas sans largeur ni épaisseur. Mill était plus vrai quand il voyait dans les figures géométriques des abstractions. Du reste, l'argument qu'il emploie ici n'a pas grande valeur. Après avoir exposé la connaissance par parties, la logique de Port-Royal ajoute : « On voit par là combien est ridicule l'argument de quelques sceptiques, qui veulent faire douter de la certitude de la géométrie, parce qu'elle suppose des lignes et des surfaces qui ne sont pas dans la nature. *Car les géomètres ne supposent point qu'il y ait des lignes sans largeur, ou des surfaces sans profondeur; mais ils supposent seulement qu'on peut considérer la longueur sans faire attention à la largeur; ce qui est indubitable; comme lorsqu'on mesure la distance d'une ville à une autre, on ne mesure que la longueur des chemins, sans se mettre en peine de leur largeur.* »

Si l'on s'appuie sur un pareil argument pour prétendre que l'exactitude des principes mathématiques est imaginaire, on pourra dire à Newton ou à Laplace : Votre mécanique céleste est fausse, car dans la nature il n'y a pas de corps qui ne soient que pesants.

égaux; » et, tant qu'aucune nécessité pratique ne nous force de tenir compte de ces irrégularités, nous opérons comme si elles n'existaient pas.

Cette exactitude des principes mathématiques est donc tout imaginaire; pas plus que les autres sciences, la géométrie n'est complètement d'accord avec les faits; mais nous le supposons pour en tirer des conséquences. Aussi Mill se range à l'opinion de Dugald Stewart qui regardait la géométrie comme fondée sur des hypothèses auxquelles elle devrait sa certitude propre, et qui était d'avis que toute science, édifiée de la même manière sur des hypothèses, pourrait présenter le même enchaînement et le même accord des conséquences entre elles et avec les prémisses, et que nécessairement elle nous paraîtrait évidente dans le cas où les prémisses seraient vraies. Tout ce qu'on peut dire des théorèmes de la géométrie, c'est qu'ils découlent nécessairement des prémisses; *et celles-ci sont des hypothèses, si éloignées d'être nécessaires, qu'elles s'écartent toujours plus ou moins de la vérité.* On peut accorder la nécessité aux conclusions d'une science, *en ce sens qu'elles découlent de prémisses qui ne répugnent pas aux conditions de toute recherche*, et qui peuvent être *vraies ou non vraies, certaines ou douteuses*, sans que cela empêche *de les regarder comme certaines pour le but qu'on se propose.*

Parmi les principes de la géométrie, outre les définitions, il y a aussi les axiomes; il est vrai que quelques axiomes peuvent se ramener à des définitions, mais cela est impossible quant à d'autres, tels que ceux-ci : deux lignes droites ne peuvent renfermer aucun espace, ou celui-ci qui lui est équivalent : deux droites qui se coupent en deux points coïncident ; et : deux droites

qui se coupent ne peuvent être parallèles à une même troisième (1). Il en est quelques-uns qui sont vrais indépendamment de toute hypothèse, comme celui-ci : deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles; qui est vrai, *même dans le domaine de l'expérience*. Sous ce rapport, la géométrie est sur le même pied que la plupart des sciences; il y a aussi, dans ces dernières, des propositions générales absolument vraies, telles que celle-ci en mécanique : pour arrêter le mouvement produit par une force, il faut une force égale et opposée; ou cette autre : la terre tourne en vingt-quatre heures, etc., tandis que la proposition sur la figure de la terre, par exemple, n'est qu'approximative. *Les unes et les autres sont d'ailleurs des inductions* (2); *mais les unes, au contraire des autres, ne sont viciées d'aucune fiction.*

Quel est maintenant le fondement de notre croyance aux axiomes ? Une induction fondée sur l'observation. Cette assertion est contraire à un ancien préjugé philosophique. M. Whewell, qui a soutenu l'opinion opposée et cherché à fonder philosophiquement les mathématiques, étant un adversaire de poids, c'est contre lui seul que Mill dirigera son argumentation.

Tout le monde accorde que les axiomes, dont il est question, nous sont fournis originairement par l'observation ; mais Whewell et ceux qui se rangent à son avis, nient que ce soit l'expérience qui les prouve,

(1) Nous faisons remarquer que l'argumentation de Mill portera toujours sur ces prétendus axiomes, comme il était facile de le prévoir.

(2) Quelle induction peut nous avoir donné la proposition que la terre tourne en vingt-quatre heures ? (Voir dans le chapitre suivant ce que nous disons sur les définitions scientifiques.)



puisque, s'il en était ainsi, on aurait besoin, pour les établir, d'une foule d'essais répétés, comme pour les vérités expérimentales proprement dites. Ces axiomes, disent-ils, sont des vérités à priori auxquelles l'esprit adhère dès qu'il les saisit.

Mill répond : Si cette évidence est indépendante de l'expérience, elle lui est au moins conforme ; si cet axiome, *deux droites ne peuvent enfermer aucun espace*, n'a pas besoin de confirmation, c'est qu'il se trouve confirmé de lui-même à chaque instant de notre existence ; seulement cette expérience se fait de si bonne heure que nous oublions les opérations de l'esprit qui nous ont conduits à la formuler. Pourquoi donc chercher un fondement spécial de notre foi à cette catégorie de vérités? C'est aux défenseurs de l'opinion opposée à en démontrer la nécessité (1). Mais dans l'impossibilité où ils sont d'établir que l'enfant a cette conviction avant que ses sens aient reçu des impressions, force leur est bien de recourir à des arguments d'une autre nature, et que voici :

Premier argument. — Nous voyons la proposition (*deux droites, etc.*) seulement dans la pensée, et non dans l'expérience extérieure ; nous en reconnaissons la vérité par intuition. D'ailleurs, comment peut-on être certain expérimentalement que deux droites qui se sont coupées une fois ne se couperont plus, puisqu'on ne peut expérimentalement les prolonger jusqu'à l'infini?

(1) « Les idées qu'on croit innées, dit Helvétius, sont celles qui nous sont familières, et qui se sont comme identifiées avec nous ; mais elles nous sont toujours venues par les sens. Elles sont l'effet de l'éducation, de l'exemple, de l'habitude. »

La réponse se trouve dans la facilité de se représenter en imagination les figures de la géométrie, et dans la certitude, *acquise par l'expérience*, que cette représentation correspond fidèlement aux objets extérieurs. C'est ainsi que dans tout système d'expériences, nous opérons sur quelques individus qui représentent tous ceux qui leur ressemblent ; ou bien encore que nous pouvons décrire la forme et la couleur d'un animal d'après une épreuve photographique, parce que nous nous sommes assurés de la fidélité de telles épreuves. Ainsi l'expérience, pour être intérieure, n'en est pas moins une expérience. Quant au second reproche de ne pouvoir prolonger les lignes à l'infini, n'est-il pas vrai que, si elles se rencontrent, c'est à une distance finie? Or, lorsque je me représente deux lignes droites qui, commençant par diverger, finissent par s'infléchir l'une vers l'autre, représentation que je sais être légitime et conforme aux faits extérieurs, j'ai l'impression d'une ligne courbe et non plus d'une ligne droite.

Second argument. — Il consiste dans la distinction fondamentale entre les vérités générales, et les vérités universelles et nécessaires. Si souvent que j'aie vu de la neige, je n'en puis pas conclure que la neige est blanche toujours et partout, encore moins qu'elle doive être blanche ; tandis que les axiomes mathématiques sont tels que le contraire est inadmissible, incompréhensible. Quelque effort que je fasse, je ne puis me figurer, par exemple, que deux et trois fassent sept.

Voyons, dit Mill, sur quel fondement cette argumentation repose et ce que signifie au fond cette incompréhensibilité. Il est reconnu que l'on éprouve la plus grande difficulté à séparer deux choses que l'expérience de tous les jours nous montre constamment réunies.

Cette difficulté inhérente à la nature de notre esprit et très-puissante sur l'homme inculte, ne laisse pas d'exercer une certaine influence, même sur l'homme instruit ; car l'homme reste l'homme. On pourrait en citer beaucoup d'exemples. Ainsi les partisans de Descartes repoussaient la théorie de Newton sur la gravitation, en soutenant qu'il est contradictoire qu'un corps agisse là où il n'est pas. C'était là l'effet d'une longue habitude. Que sera-ce si l'habitude est plus ancienne encore, plus enracinée : comme celle, par exemple, qui nous apprend que, quelque loin qu'un point soit situé, nous pouvons en placer un derrière lui ; qu'après un instant quelconque, un autre instant suit ; ce que nous avons traduit en disant que l'espace et le temps sont infinis? Quoi d'étonnant dès lors que le contraire de l'axiome (*deux droites, etc.*) nous apparaisse comme incompréhensible ? Quelle analogie, quelle série de faits dans une autre branche de connaissances pourrait nous faciliter la représentation de deux droites renfermant un espace? aucune. Pourquoi conclure de cette incompréhensibilité contre la source empirique de cette proposition? Whewell engageait ceux qui niaient sa distinction entre vérités nécessaires et vérités contingentes, à étudier la géométrie ; Mill engage, de son côté, Whewell et ses adhérents à étudier les lois de l'association.

M. Whewell lui-même n'apporte-t-il pas des preuves à l'appui de l'opinion adverse, en citant ces principes nouveaux des sciences (la gravitation, par exemple), dont nous ne pouvons concevoir aujourd'hui la non-admission, et qui furent rejetés au nom de leur inconcevabilité par les contemporains de ceux qui les ont découverts? Pour lui donc, pas plus que pour Mill, l'inconcevabilité d'une

proposition n'est une raison de la rejeter d'une manière absolue.

Dans le même chapitre, Mill cite ce passage de la *Quaterly Review :*

« L'idée de direction, c'est-à-dire l'impossibilité d'aller directement d'un point donné à un autre point par plusieurs chemins, est un objet de l'expérience pratique longtemps avant d'être l'objet de la pensée abstraite. Nous ne pouvons nous imaginer le contraire sans porter atteinte au souvenir de notre expérience antérieure, et sans détruire la notion que nous avons de l'espace. D'où pourrions-nous tirer, *si ce n'est de l'expérience*, la certitude de l'homogénéité des parties de la distance, de l'espace, de la force, des aggrégats mesurables en général, dont la vérité des autres axiomes dépend. »

Enfin, dans un autre endroit de son ouvrage (1re partie, chap. 24, § 7) il s'exprime ainsi :

« On accepte que deux lignes droites ne peuvent enfermer un espace; — que des lignes droites divergent l'une de l'autre à divers degrés ; *qu'il existe des choses comme des angles, qui sont capables d'être égaux ou inégaux.* On accepte *qu'il existe une chose comme un cercle et que tous ses rayons sont égaux ; qu'il y a des choses comme des ellipses, et que la somme des distances focales pour chacun de leurs points est la même ; qu'il y a des choses comme des lignes parallèles, et que ces lignes sont toujours à égale distance l'une de l'autre...* »

Telle est la théorie de Mill. Nous n'entreprendrons pas ici une réfutation des doctrines empiriques. Nous voulons seulement savoir si elles suffisent à rendre raison de ce qui est, si elles ne laissent pas place à de nouveaux *pourquoi* sur les faits qu'elles prétendent expliquer.

Quand on demande à Mill d'où provient l'illusion qui nous fait regarder les vérités mathématiques comme nécessaires, il allègue la force de l'habitude, d'observations souvent répétées. Mais quelle observation plus constante que celle qui nous montre le soleil tournant autour de la terre, les astres plus grands à l'horizon qu'au zénith? Il y a donc autre chose qui rend raison de cette certitude. Le géomètre est certain que partout où il y a des êtres intelligents, les principes mathématiques sont valables. C'est ce que Mill accorde lui-même quelque part : « Nous ne doutons pas, dit-il, que dans la région des étoiles fixes, la ligne droite ne soit le plus court chemin » ; et dans un autre passage : « Si de deux corps, l'un est une sphère, et l'autre un cylindre de même hauteur et de même diamètre, le premier sera les deux tiers du second, quelles que soient d'ailleurs la nature et la matière de ces corps. » En vertu de ses principes, il devrait cependant admettre la possibilité d'une expérience contraire aux faits jusqu'ici observés.

L'illusion qui nous trompe, ajoute-t-il encore, provient de ce que cette science se fonde sur des définitions adéquates. Que signifie au fond cette réponse? Pourquoi toute science fondée sur des définitions adéquates est-elle évidente? Pourquoi est-il possible en géométrie de donner des définitions adéquates? Peut-on donner des définitions adéquates dans d'autres sciences? La solution de ces questions serait très-intéressante, et Mill ne la donne pas.

Enfin, dit-il, les objets de la géométrie étant simples, nous n'avons aucune difficulté de nous les figurer intérieurement, et en outre l'expérience ne nous montre jamais le contraire de notre croyance. — Mais

nous lui demanderons pourquoi les objets de la géométrie sont simples; pourquoi l'expérience ne nous montre et ne nous montrera (il en est certain) jamais le contraire. Pour répondre à la dernière de ces questions, Mill pose l'axiome de *la constance et de l'invariabilité des lois de la nature*. Or, cet axiome s'appuie sur une induction plus générale, et bien loin de pouvoir servir à étayer l'invariabilité des lois particulières, il est lui-même une conséquence de celle-ci. Pour établir que les lois mathématiques sont invariables, je ne puis pas m'appuyer sur la proposition que les lois de la nature sont invariables, cette proposition étant plus générale et par conséquent moins certaine que la première. Nous reviendrons d'ailleurs plus tard sur ce point.

Ainsi, des propositions qui ont été l'objet de ce débat, les uns font des axiomes, d'autres des postulats, d'autres des faits. Quelle différence Mill établit-il entre vérité expérimentale et théorème? Où doit cesser le fait? Quand doit commencer la démonstration? C'est assez dire que Mill, de même que Kant, est obligé de faire l'énumération des vérités premières qu'on admet sans démonstration, qu'il doit nous dire jusqu'où s'étend le domaine des faits admis sans preuve, sur la foi de l'intuition externe, qui vient détrôner l'intuition interne du philosophe de Kœnigsberg (1).

---

(1) Il s'est trouvé quelqu'un qui, poussant à l'extrême ces doctrines, a voulu faire de la géométrie une science en grande partie toute d'intuition. Nous ne parlerions pas de cet auteur, dont la dissertation est une déclamation trop souvent grossière pour être scientifique, si sa théorie n'était la conclusion légitime de celles qui précèdent. Dès qu'on n'a pas de règle fixe pour distinguer les vérités à admettre sans démonstration de celles qui doivent découler du raisonnement,

§ 3. — THÉORIE DES IDÉALISTES-RÉALISTES : M. UEBERWEG (1).

Des auteurs précédents, les uns, les géomètres, acceptaient le problème et cherchaient à le résoudre, sans y réussir ; les autres le détruisaient, soit en regardant les postulats comme des vérités à priori, soit en les rangeant avec les axiomes au nombre des vérités empiriques ; mais aucun ne s'était avisé de remonter

(1) Voir, à la fin de l'ouvrage, la traduction des principaux extraits de la dissertation de ce philosophe, tirée des *Arch. pédag.* de *Jahn*, vol. XVII, 1851.

rien ne s'oppose à ce qu'on érige en fait évident, ce à quoi d'autres se voient obligés de chercher une démonstration.

Dans sa *Réforme de la géométrie* (Paris, Mallet-Bachelier, 1856) cet auteur part de ce principe que toute science, pour exister, a besoin de données dont il faut faire l'énumération, et qui sont la matière même de la science. Pour qu'il y ait une botanique, il faut des plantes ; pour qu'il y ait une zoologie, il faut des animaux ; pour qu'il y ait une géométrie, il faut des faits géométriques. M. Bailly, nous n'en doutons pas le moins du monde, sait ce que c'est qu'un fait géométrique, mais il a oublié de nous l'apprendre. Heureusement pour nous qu'il en a cité un grand nombre ; tous les théorèmes des deux premiers livres de Legendre sont des faits qu'il est inutile de démontrer, ce qui n'empêche pas l'auteur d'essayer de temps en temps une démonstration. Il y a même des faits géométriques qui sont restés jusqu'ici cachés, et qui le resteront encore pendant longtemps : c'est un fait que « s'il y avait à partager l'arc CR en deux parties égales, il n'y anrait qu'à partager la corde CR qui le soustend ; *pour partager en trois, le moyen est inconnu.* » Je continue de citer l'auteur :

« Ces propositions préliminaires, dont on pourrait augmenter le nombre, ne sont pas autre chose qu'une simple description de *faits géométriques*. Ces faits sont aujourd'hui noyés dans un amas incohérent d'expressions vagues et indéterminées. On balbutie des explications, des démonstrations et des preuves, *sans savoir en quoi consiste une explication, une démonstration, une preuve* ; ces mots

aux principes de la science, ou, si l'idée en avait été émise, d'en essayer une nouvelle exposition.

M. Ueberweg a tenté d'asseoir sa réformation de la géométrie sur une théorie philosophique. Son système se fonde sur une induction première : Dans toutes les sciences comment procède-t-on? Comment procède-t-on en astronomie, en physique, et même, ajoute-t-il autre part, en botanique, en zoologie, en physiologie?

---

mal définis sont employés à tort et à travers, et l'esprit le mieux disposé ne peut leur attacher de signification précise. Le géomètre croit toujours être au sein des sophistes grecs, et il parle comme s'il voulait les empêcher de l'interrompre. Il accumule alors des démonstrations et des preuves, *et il ne sait ni ce que c'est qu'une démonstration, ni ce que c'est qu'une preuve.* »

L'auteur a eu cette fois la bonne idée de nous dire ce qu'est une démonstration : « Une démonstration, sachez-le donc, a pour but une appréciation de rapports, on ne démontre ni les choses, ni leurs attributs, et propriétés.... Mais il n'est pas moins ridicule d'essayer de démontrer que deux points suffisent pour déterminer une ligne droite, qu'il ne le serait de vouloir démontrer que le soleil est brillant, que l'argent est blanc, l'or est jaune, etc. »

Quand on a de si lumineuses explications à donner, on a bien le droit de dire en parlant des *principes*, *axiomes*, *théorèmes*, *démonstrations*, *lemmes*, *corollaires* : « c'est avec du galimatias (sic) de cette sorte qu'on fait de la géométrie. Nous le demandons à tout homme de bon sens, quel esprit droit pourrait supporter avec calme une si creuse divagation? Ces insupportables scholastiques ne tarderont pas sans doute à démontrer *la droite* elle-même, puis enfin à démontrer le *point*; et quand on leur demandera ce qu'ils entendent par *démontrer*, ils n'en sauront absolument rien. » Nous voulons admettre que l'auteur sait, lui, ce qu'il entend par démontrer, mais en attendant l'ère féconde où, suivant les chemins tracés par M. Bailly, « l'esprit se sentira à son aise au sein des sublimes vérités qui brilleront du plus pur éclat, y déploiera agréablement ses ailes et y prendra toute son ampleur », cette ère où « l'on se contentera de montrer les figures, et d'en faire saisir les différents attributs », à la riche énumération de faits géométriques que M. Bailly s'est donné la peine de faire, nous préférons le galimatias de Legendre.

On part des résultats de l'expérience pour remonter aux principes, puis de ceux-ci on redescend vers les phénomènes pour les expliquer. Kepler détermine exactement la route des planètes — voilà l'expérience. La nature de leur orbite peut s'expliquer parfaitement en supposant inhérente à la matière une force particulière, l'attraction — voilà le principe. A l'aide de celui-ci, on construira tout le système solaire, et la mécanique céleste sera constituée. — En optique, le phénomène de l'interférence des rayons lumineux nous conduit à l'hypothèse des ondes; celui de la polarisation, à celle des vibrations transversales; puis ces hypothèses serviront à expliquer tous les autres phénomènes lumineux: c'est la tâche de l'optique mathématique.

Pourquoi, dit l'auteur, n'en serait-il pas ainsi en géométrie? Cette science doit-elle faire exception? D'ailleurs, le procédé des sciences naturelles n'est-il pas conforme à la marche de l'esprit humain qui, partant du particulier, du concret, πρότερον πρὸς ἡμᾶς, s'élève au général, à l'abstrait, πρότερον φύσει, puis du général redescend vers le particulier? Pourquoi aussi quand toutes les sciences sont doubles, ont une partie expérimentale, analytique, et une partie théorique, synthétique, la géométrie n'aurait-elle que la dernière? Pourvoyons donc la géométrie d'une base expérimentale, et peut-être les principes que nous fournira l'expérience, nous donneront la solution des difficultés qui se rencontrent au seuil de la science, telle qu'elle existe aujourd'hui.

M. Ueberweg semble regarder le choix de ces expériences comme plus ou moins arbitraire, et ne se laisser guider que par la simplicité. Quoi qu'il en soit, il s'arrête à ces quatre principes :

I. Tout corps parfaitement libre peut se mouvoir partout et dans tous les sens.

II. S'il est fixé en un endroit, aucun de ses points n'est libre de se mouvoir partout, quoiqu'il ne soit pas privé de mouvement.

III. S'il est fixé par deux endroits, aucun de ses points n'est plus susceptible de se mouvoir partout où il pouvait se mouvoir dans le second cas; et de plus, une suite continue de points reste immobile dans le corps.

IV. Enfin, s'il est fixé par trois endroits, le corps reste immobile.

De la première expérience, on déduit par *idéalisation*, le principe de l'*homogénéité* (1), *continuité* et *infinité* de l'espace.

De la seconde, l'idée du *point*, élément de l'espace, et de la *surface*, trajectoire des points mobiles dans la rotation du corps autour du point fixe.

De la troisième, l'idée de la *ligne;* mais, pour arriver à celle de la ligne droite, l'auteur se trouve avoir besoin de la quatrième, sans qu'on sache trop pourquoi. Il semblait plus naturel de tirer la ligne droite de cette troisième expérience, en tant qu'elle est le lieu des points qui restent immobiles pendant la rotation; et de la quatrième, l'idée du plan pour une raison analogue.

Ces principes obtenus analytiquement, M. Ueberweg procède à l'édification synthétique de la géométrie. Disons ici, pour ne pas nous appesantir sur des critiques géométriques, qu'il fait jouer un grand rôle aux infiniment petits et aux limites, malgré les dangers de con-

(1) Voir ce que nous disons liv. II, chap. II sur l'homogénéité de l'espace.

sidérations de cette nature; et que, d'un autre côté, ses démonstrations sont enchaînées d'une façon obscure et laborieuse. Il est vrai qu'il pourrait se justifier en affirmant que, dans les sciences, on est souvent obligé de démontrer ce qui est clair et simple, par des raisonnements longs et difficiles. Mais si la remarque s'applique au postulatum d'Euclide, c'est là, comme le dit Mill, un opprobre pour la géométrie.

Dans la critique qui va suivre, nous fesons toujours abstraction de la théorie philosophique de l'auteur, sur laquelle nous reviendrons dans le chapitre suivant, et nous nous attachons spécialement à la partie scientifique de son travail.

C'est l'induction qui a amené M. Ueberweg à rattacher la géométrie aux sciences naturelles Voyons donc s'il est resté aussi fidèle à l'analogie qu'il le prétend.

Toute science, dit-il, a une partie expérimentale, analytique, et une partie théorique, synthétique. Mais en quoi consiste cette partie expérimentale, en astronomie, en physique, en botanique, etc.? Ce n'est pas, comme semble le croire M. Ueberweg, dans un nombre plus ou moins restreint de faits empiriques; mais essentiellement dans la description, fidèle et *complète autant que possible* de tous les phénomènes, qu'on cherchera ensuite à expliquer par un ou plusieurs principes généraux. La partie expérimentale de la géométrie devrait donc être la description et l'énumération de toutes les figures que nous présente l'univers; et cette science existe en partie sous le nom de cristallographie; le botaniste, le zoologiste, décrivent eux aussi les formes des objets dont ils s'occupent, et cette partie de leur science n'en est que la partie géométrique. En un mot, la géométrie expérimentale, c'est l'étude des corps,

abstraction faite de leur qualité, de la nature particulière de leur substance. Recherchez ce qu'il y a de commun dans les phénomènes des figures naturelles, vous obtiendrez les principes de la géométrie théorique; puis à l'aide de ces principes vous reconstruirez tout un monde de figures idéales, des triangles, des cercles, des tétraèdres, des icosaèdres, qui servent comme *de types* aux triangles, cercles, tétraèdres, icosaèdres de la nature.

Cette erreur fondamentale est la source de toutes les fautes contre l'analogie que nous allons signaler.

A. M. Ueberweg regarde le choix de ses expériences comme arbitraire dans certaines limites (1), et cite, à cet effet, Kepler qui porta ses observations sur la planète Mars, tandis qu'il eût pu choisir tout aussi bien Jupiter, ou Vénus, ou Saturne. Mais c'est une erreur. Kepler veut établir cette loi : Les planètes se meuvent dans une orbite elliptique. Qu'a-t-il à faire? Une seule chose : c'est d'observer toutes les planètes connues, et de déterminer leur orbite. Qu'il commence par Mars, c'est bien; mais s'il y a choix ici, c'est dans l'ordre des expériences, et non leur nombre ou leur nature. Aussi, dès qu'on découvre une nouvelle planète, la première chose que l'on fait, c'est de voir si elle obéit aux lois de Kepler (2).

Ce qui a causé l'erreur de M. Ueberweg, c'est qu'il n'a considéré que le cas où il y a un débat à vider entre deux théories contraires. Sans doute, quand il s'agit

(1) Dans la dissertation telle qu'elle est imprimée dans les *Arch. pédag.*, l'auteur le regardait comme tout-à-fait arbitraire et ne se laissait guider dans ce choix que par la simplicité.

(2) Voir d'ailleurs à ce propos, dans le chapitre suivant, la discussion sur la généralité des lois de la nature.

de décider entre la théorie de l'émission et celle des ondulations, on a le choix libre entre les expériences qui ne peuvent s'expliquer que par l'une des deux théories. Mais, en réalité, pour que les ondulations arrivent à l'état d'hypothèse à peu près définitive, comme l'attraction, il faut considérer *l'ensemble* des phénomènes lumineux (1). Et voilà pourquoi dans les sciences naturelles, à côté de la science théorique, il y a la science expérimentale, qui n'est que le catalogue, le muséum des faits que la première doit coordonner; et c'est parce que ce catalogue est indéfini, qu'une hypothèse, quelle que soit sa probabilité, reste toujours plus ou moins *hypothèse*, et que les phénomènes, quelque nombreux qu'ils soient, sont toujours susceptibles de plusieurs explications. Comme le disait Mill, on peut expliquer tous les phénomènes célestes en supposant que les mouvements apparents soient les mouvements réels, quand ce ne serait que par l'explication surnaturelle qu'un génie préside à chaque monde et le conduit à toute bride dans une voie tracée d'avance par la main du Tout-Puissant. Mais cette hypothèse seule est acceptée comme vraie, qui, tout en étant simple, donne une explication complète de tous les faits connus, et même qui permet d'en découvrir, d'en

(1) C'est si vrai qu'il y a de ces phénomènes qui ne s'expliquent, dans l'hypothèse des ondulations, qu'à l'aide d'hypothèses accessoires; ainsi, par exemple, les anneaux colorés, d'après la théorie pure et simple, devraient se présenter en sens inverse, et ne trouvent leur explication complète que dans la supposition venue après coup, que la réflexion fait perdre un nombre impair de demi-ondulations. C'est parce que cet *ensemble* est beaucoup moins connu, vu la complexité des phénomènes, que l'hypothèse des ondulations est jusqu'à présent moins bien établie que celle de l'attraction.

deviner d'autres restés inconnus, comme cela est arrivé pour la planète Neptune, ou la rotation de l'anneau de Saturne, ou bien encore pour l'hypothèse des ondulations, dans l'expérience du disque percé d'un trou central.

En est-il ainsi des expériences et des hypothèses de M. Ueberweg? Pas le moins du monde : elles ne résument pas les faits géométriques, et bien mieux elles ne les expliquent pas avec facilité, nous ne disons pas, pour le moment, avec rigueur. Il peut choisir les expériences qu'il veut; pourvu qu'elles lui donnent l'espace, le plan, la droite et le point, elles le conduiront au but; et ces expériences mêmes n'ont pas ici à décider entre deux ou plusieurs suppositions également possibles; ce sont, en réalité, de nouvelles définitions (voir surtout la IIIe) substituées aux anciennes. Aussi, en réalité, ne lui ont-elles pas servi à grand'chose; on avait démontré depuis longtemps que le lieu géométrique des points à égale distance de deux autres était un plan, c'est-à-dire qu'une droite pouvait s'y appuyer dans tous les sens. L'idée de la direction qu'il introduit ensuite pour expliquer les parallèles, n'est pas contenue dans ses expériences; la définition qu'il en donne est tout à priori; et ce qu'il y a de véritablement nouveau, la démonstration que la droite est le plus court chemin entre deux points, pouvait se déduire presque immédiatement de la IIe et de la IIIe expérience.

B. Comme le fait remarquer M. Ueberweg lui-même, dans toute science les principes se fortifient par leur accord avec les faits déjà observés; cela résulte même de leur caractère tout hypothétique, tout provisoire; un nouveau fait se présente-t-il qui ne s'explique pas avec la même facilité, on rejette l'hypothèse et l'on en cherche une autre. L'histoire des sciences n'est même que l'his-

toire des substitutions d'hypothèses nouvelles à d'autres hypothèses moins avantageuses; ainsi en astronomie, on a d'abord les cercles de Platon et d'Aristote, les épicycles de Ptolémée, puis Copernic; Kepler lui-même ne fit-il pas dix-neuf hypothèses sur la nature de la trajectoire de Mars avant de rencontrer la bonne? Ainsi en physique l'horreur du vide est remplacée par la pesanteur de l'air, l'émission par les ondulations, etc. Le fait, voilà ce qui est certain; le principe au contraire n'est admis qu'avec hésitation. M. Ueberweg, dans sa nouvelle théorie, a-t-il substitué une hypothèse à une autre hypothèse? a-t-il fondé la géométrie sur d'autres principes que ceux qui lui ont toujours servi de base? L'explication des phénomènes géométriques en est-elle devenue plus facile? Non : tout au plus pourrait-on voir dans son travail un essai curieux d'une réduction dans le nombre des axiomes; mais pas de point de vue nouveau pour en faire apprécier l'essence. De plus, comme cela apparaîtra plus clairement quand nous aurons exposé notre théorie de la certitude des propositions scientifiques, il a confondu des faits avec des principes. Quand tout l'ensemble de la science géométrique sera construit, quand on verra l'accord de toutes les conséquences entre elles et avec les faits, en quoi la définition de la droite, du plan, du point, l'infinité de l'espace seront-elles confirmées? Ce sont là des faits aussi, et qui sont toujours les mêmes depuis que la géométrie existe.

C. Dans les sciences naturelles, les expériences qui servent à établir les principes, sont des faits qui rentrent dans le domaine de ceux que ces sciences ont mission d'expliquer. La trajectoire des planètes est un phénomène astronomique; l'interférence et la polarisation,

des phénomènes optiques. Il n'en est pas de même des expériences que M. Ueberweg place en tête de la géométrie. Ce ne sont pas des faits géométriques, mais des faits mécaniques; la géométrie n'aura pas à en rendre raison plus tard; les principes trouvés, on les met de côté, et l'on n'en parle plus. Le temps vient se mêler sous la forme du mouvement à l'étude de l'espace. — Pour s'en démêler, répondrait-il. — Mais là est précisément la faute contre l'analogie : les expériences mises en œuvre importent autre chose qui n'appartient pas à la science. On aurait beau dire que nulle science ne marche seule, et sans l'appui de ses sœurs; que l'astronome se sert de télescopes, appelant ainsi à son aide l'optique; que le physicien, pour ses prismes de cristal, a recours au chimiste et au géomètre; ce serait confondre le moyen avec l'objet même de la science; autant vaudrait dire que l'astronome appelle à son aide la physiologie, parce qu'il se sert de ses yeux. Le phénomène, voilà ce que le naturaliste veut obtenir, veut connaître; les moyens qu'il emploie pour le connaître sont accessoires, et il n'a pas à s'enquérir de leurs principes. L'astronome, en tant qu'il ne fait que noter exactement les coordonnées des astres, n'a pas besoin de connaître la théorie de l'instrument qu'il emploie, ni la manière dont on a taillé les lentilles, forgé les tubes, creusé les vis.

Nous aurons encore, dans le courant de ce travail, à présenter plusieurs observations sur cette théorie, à laquelle nous attachons une grande importance, vu l'affinité étroite qui, malgré des divergences considérables, la rapproche de la nôtre. L'exposé de celle-ci est donc nécessaire pour que ces observations deviennent intelligibles.

CHAPITRE II.

DES SCIENCES ET DES CARACTÈRES DE LEUR OBJET.

Qu'est-ce que la science? quel est son but? comment le réalise-t-elle? Ce sont là toutes questions préliminaires qu'il faut résoudre, avant de songer à établir les principes d'une science quelconque. La nature de ce travail ne nous permet pas d'y répondre en détail; nous nous contenterons de poser quelques prémisses que leur évidence fera, pensons-nous, adopter.

La *science idéale* ou *absolue* est la reconnaissance de l'accord entre l'univers et l'intelligence; la *science humaine* ou *actuelle* est la tendance vers la connaissance complète de cet accord; c'est un ensemble de plus en plus complet de vérités reconnues.

On voit par là, que nous ne croyons pas qu'il puisse exister des sciences complètes, incapables désormais de tout progrès. C'est même cette inaccessibilité du but, qui est la condition de notre activité incessante ici bas. C'est un fait reconnu de tout temps : l'homme veut savoir; l'immensité de la tâche ne le rebute pas. Pourquoi veut-il savoir? Cette question est en dehors de notre objet. Mais que veut-il savoir? Nous le répétons : la science absolue.

Dans cette science, les faits sont groupés de telle sorte, que l'on voit immédiatement les lois auxquelles

ils sont soumis et la manière dont ils s'enchaînent. Celui qui a créé l'univers en voit l'ensemble de cette façon. Pour lui, le fait, sa place, son explication sont une seule et même chose. Si l'astronome connaissait le lieu précis de tous les corps célestes à un moment donné, leur masse exacte, et que ses moyens de calcul fussent plus intuitifs, il pourrait dire immédiatement quelle serait leur position au moment suivant; et c'est vers ce résultat qu'ont jusqu'ici tendu tous les progrès de l'astronomie mathématique. Qu'on réussisse à l'atteindre, et cette science est constituée dans son idéalité. C'est là qu'arrivait en quelque sorte Cuvier, quand il reconstruisait le squelette entier, dont il ne possédait qu'un os; c'est un but semblable qu'on poursuit, quand on cherche à trouver, dans la configuration et le climat d'un pays, la raison des modifications de sa flore et de sa faune, et des mœurs de ses habitants.

La méthode de la science consiste donc, en général, à définir les faits, à les grouper de manière que chacun apparaisse comme le produit de ceux qui le précèdent; en d'autres termes, à les ranger dans l'ordre du simple au composé. Pour cela, il faut rechercher d'abord en quoi consiste la simplicité d'un fait, et comment un fait plus particulier se compose ou se complique.

La chimie inorganique offre un bel exemple de définition de corps simples et de corps composés, ainsi que d'une classification idéale. Elle commence par dresser la liste de ses éléments, puis elle les combine deux à deux : ce sont les composés du premier ordre; puis ceux-ci deux à deux, à leur tour : ce sont les composés du second ordre, et ainsi de suite.

Deux objets étant supposés connus, si un troisième en découle par une loi connue, l'énoncé de cette loi

est la définition de ce troisième. Telle est la définition *génétique*, la seule absolument valable. Tous les faits ne peuvent donc se définir. Nous verrons plus loin quel est le caractère scientifique des faits non définissables qui sont en tête de nos sciences.

Une remarque sur le classement : il suit de ce qui précède que le classement idéal est déterminé, quoiqu'il puisse se faire que le classement actuel soit imparfait par suite de notre ignorance. Supposons que le cercle soit, par sa nature, une figure plus compliquée que le triangle; dans la science idéale, l'étude du triangle doit précéder celle du cercle, quoique, dans la science actuelle dont les moyens de démonstration sont imparfaits, l'étude, soit complète, soit partielle du cercle puisse précéder celle du triangle.

Ce chapitre sera divisé en trois paragraphes :

1° De la science universelle.

2° De la science des corps inertes.

3° Déduction de l'objet de la Géométrie.

§ 1. — DE LA SCIENCE UNIVERSELLE.

La science universelle se subdivise en sciences particulières suivant la nature diverse des faits qui en sont l'objet. Les lois de l'esprit humain étant immuables, les sciences se classent d'après leur objet.

Le mot *objet* revêt ici un sens tout particulier. L'objet de la science n'est pas l'objet tel qu'il est donné par l'intuition ou l'observation externe, mais tel qu'il est saisi par l'intelligence. Je tiens en main un minéral : cet objet, bien qu'unique, se subdivise en plusieurs objets scientifiques, si l'on peut ainsi s'exprimer. Le cristallographe, le géomètre en étudieront la forme;

le chimiste, la composition et les réactions; le physicien, les propriétés optiques; ce minéral peut être, en un mot, l'objet d'une foule de sciences, qui se nomment cristallographie, minéralogie, physique, chimie, etc.

Résoudre le problème de la classification des sciences, ce serait donc faire l'énumération, suivant un principe rationnel, de toutes les manières possibles de considérer l'objet de la science en général.

Notre but n'est pas ici de tenter cette solution dans tous ses détails; ainsi que nous le dirons tantôt, nous doutons même qu'elle soit possible, dans le sens où on l'entend communément; nous voulons seulement déduire l'objet de la géométrie,

La science humaine a un objet : l'étude de l'univers. De là, une première division de cette science, suivant que j'étudie l'univers en lui-même, ou les conditions de son intelligibilité; les choses d'un côté, l'intelligence de l'autre; le monde ou la pensée, les êtres ou les idées, le non-moi ou le moi. L'intelligible et l'intelligent sont corrélatifs; ils existent l'un pour l'autre et l'un par l'autre; l'inintelligible n'existe pas, pas plus que l'intelligence pure (1). Ce sont deux mondes juxtaposés et opposés, dont la conscience cherche la synthèse. Ils sont opposés, disons-nous; en effet, dans le monde de la pensée, tout s'enchaîne, se coordonne; tandis que les faits sont

(1) Dans l'ensemble de l'univers ou des objets de l'intelligence est comprise la pensée de l'homme. Nous ajoutons cette note pour corriger ce qui pourrait paraître trop exclusif dans cette division, et pour expliquer en même temps ce terme d'*intelligence pure*. Nous entendons par là l'intelligence abstraction faite de tout contenu et de toute pensée, même de la pensée d'elle-même.

divers, épars, sans lien apparent. De cette génération de la science résulte sa bifurcation postérieure, qui se propagera jusqu'à ses extrêmes embranchements. L'esprit humain, en face de la nature et des faits qu'il y voit, les généralise de plus en plus, c'est-à-dire les ramène à des lois plus ou moins générales, toujours concrètes et phénoménales, qui n'ont jamais, en tant qu'objectives, un caractère de généralité absolue, d'évidence, de nécessité; ces lois, auxquelles il soumet les faits, ne sont, au fond, que d'autres faits moins nombreux et tout aussi incompréhensibles que les premiers. D'un autre côté, quand, partant de ces faits généraux, et leur accordant un caractère idéal et subjectif, il leur applique ses propres lois, il construit un univers tout subjectif aussi, où les faits sont placés et classés de manière à s'expliquer d'eux-mêmes; et il y a *science*, les faits idéaux sont *vrais*, quand ils coïncident avec les faits réels; ce qui a lieu, quand les principes subjectifs de la science sont à la fois objectifs. Ces principes, dont nous trouverons tantôt le véritable caractère, sont ce que l'on nomme des *hypothèses*. L'hypothèse, quoique fournie par l'observation et terme de la science expérimentale, est donc, comme point de départ de la science idéale, tout idéale, et elle tend, à mesure que les faits la confirment, à prendre elle-même la valeur d'un fait. Quand l'hypothèse est fausse, le système n'en subsiste pas moins comme enchaînement, mais nous devient *inutile*. Ainsi, je puis bâtir tout un système solaire en supposant que les planètes se meuvent en cercle, je puis même me poser le problème de le faire coïncider avec la réalité, et c'est ce qu'a résolu, jusqu'à un certain point, Ptolémée; mais j'appelle ce système *faux*, parce qu'il ne correspond pas à la réalité. Je puis, partant

d'une idée à priori de la matière, (idée qui ne me viendra d'ailleurs que par mon contact avec la matière) construire un système chimique et physique; je puis me donner, par exemple, la liste des corps simples avec leurs affinités électriques, leurs équivalents vrais ou supposés, leurs lois de combinaisons, puis faisant de mon cerveau mon laboratoire, produire à l'infini des réactions et des corps composés, sauf à ne pas me rencontrer avec la nature; il m'est loisible, étant donnée la loi de Mariotte, que le volume des gaz est inversement proportionnel à la pression — loi que nous savons maintenant être fausse — de la regarder comme propre aux gaz, comme les définissant, et de fonder là-dessus une théorie de ceux-ci; je puis définir les corps matériels par la propriété de s'attirer en raison directe des distances, et fonder une mécanique spéciale de la matière; en un mot, je suis libre de me faire un univers à ma façon. Mais un besoin irrésistible me pousse à créer, à refaire l'univers réel, et à cette condition seule que j'y parvienne, je regarde ma création comme vraie. Chaque science aura donc une double marche : ou elle partira du fait pour arriver aux lois, elle sera d'observation ou expérimentale; ou bien elle partira d'hypothèses et de définitions, elle sera théorique; et ces parties se soutiennent l'une l'autre, et ne sont vraies que quand elles marchent parallèlement, toujours d'accord entre elles.

Laissons maintenant de côté les sciences qui s'occupent des manifestations de la pensée, et occupons-nous de la science des êtres sans rechercher la raison de leur intelligibilité. Le savant croit qu'il peut savoir, et laisse au philosophe le soin de répondre à ces questions : que sait-on ? comment sait-on ? Pour lui, la *chose en soi* est la chose telle qu'il la perçoit, ou plutôt,

il étudie les choses telles qu'il les perçoit, sans s'inquiéter de ce qu'elles peuvent être en soi. La chose en soi nous échappe; la chose perçue, le phénomène existe dans le temps et l'espace.

En tant que je regarde l'espace comme l'ensemble des êtres, le temps comme l'ensemble des événements; en tant, en un mot, que je les considère comme *réels*, ils sont *hétérogènes*, c'est-à-dire composés de parties dissemblables. Un être quelconque ne reste pas le même quand d'*ici* on le transporte *là; aujourd'hui* il est différent de ce qu'il était *hier* et de ce qu'il sera *demain*. L'être actuel n'est ce qu'il est que par les êtres qui l'entourent, et par ceux qui le précèdent; la place qu'il occupe n'est pas égale et semblable aux autres places qu'il pourrait occuper, elle en est une résultante; le moment actuel n'est pas égal et semblable à celui qui est venu avant lui, il en est le produit. C'est ce vaste ensemble dont l'intelligence doit chercher les lois; c'est cette infinie variété de faits qu'elle doit ramener à quelques faits généraux. Pour cela, elle a recours à une première abstraction; elle suppose le temps et l'espace parfaitement *homogènes*, c'est-à-dire, comme nous l'expliquerons plus tard, indéfiniment et arbitrairement divisibles en parties qui ne diffèrent que par leur grandeur.

Avant de rechercher les conséquences de cette abstraction, faisons remarquer qu'elle ne diffère pas des autres abstractions scientifiques. Étudions-nous la trajectoire d'un corps pesant, nous le supposons se mouvant dans le vide et attiré par un point infiniment éloigné, supposition en désaccord avec les faits, mais qui, simplifiant nos calculs, nous permet de représenter ces faits avec une approximation suffisante.

Quand nous voulons nous approcher davantage de la réalité, nous exprimons la résistance de l'air dans une formule toute théorique qui n'est jamais exacte, et qui n'aurait même son emploi que dans le cas où l'air serait immobile, ce qui n'a jamais lieu. Recherchons-nous les lois de l'équilibre ou du mouvement des liquides, nous les supposons parfaitement fluides et incompressibles. Tantôt on fait abstraction des qualités diverses, du volume, de la forme des corps, pour ne considérer que leur pesanteur, on opère avec des corps indifférents à toute autre loi que celle de l'attraction ; tantôt, comme en cristallographie, on n'a égard qu'à leur forme, laissant de côté toute autre propriété ; ou bien encore on étudie, comme en géométrie, des lignes sans largeur ni épaisseur, des surfaces sans épaisseur, parce que l'on fait abstraction d'une ou de deux dimensions. Cette abstraction, cette *homogénéification* idéale de l'espace et du temps a pour premier résultat de nous faire apparaître l'univers comme brut ou *inerte;* désormais les lois que nous découvrirons seront celles de la matière *divisible à l'infini;* car une partie, si petite qu'elle soit, d'un quantum homogène étant l'image fidèle du tout, si elle était moins divisible qu'une autre partie, différerait de celle-ci, non-seulement en quantité mais encore en qualité ; les atomes *étendus* et *indivisibles* sont d'une autre nature que les corps qu'ils composent, et c'est une contradiction (1).

---

(1) Toutefois l'atomisme chimique ou physique, en tant qu'il ne porte pas de jugement sur la grandeur de l'atome, peut être admis comme hypothèse satisfaisant l'imagination. — On peut lire sur ce point : *La métaphysique et la science*, par Et. Vacherot; Paris, Chamerot, 1858; *Quatrième entretien (le matérialisme).*

Au contraire, l'être est regardé comme *vivant*, quand nous faisons une condition essentielle de son existence de varier à tous les instants de celle-ci et de ne pas repasser par le même état ; il est *individuel*, quand nous le regardons dans l'espace comme composé de parties essentiellement différentes du centre à la périphérie. Si l'être vivant repassait périodiquement par une même suite d'états, nous dirions que l'individu renaît, ou qu'il naît un nouvel individu à chaque période ; s'il était composé de parties se reproduisant identiquement dans un ordre déterminé, nous le regarderions comme un aggrégat d'individus.

Il est ici nécessaire d'insister sur une remarque importante. Par notre contact avec la nature, nous avons acquis les idées de *vie* et d'*inertie* ; nous nous sommes habitués à accorder à certains êtres l'épithète de *vivants*, à d'autres l'épithète d'*inertes ;* peu nous importe en ce moment, si la distinction que nous faisons est objective ou non, s'il y a une différence de nature ou seulement de degré entre les uns et les autres ; nous constatons seulement en nous le fait des idées de *vie* et d'*inertie*. Or, tantôt nous avons voulu définir non l'être *vivant* et l'être *brut*, mais l'être *considéré comme vivant*, et l'être *considéré comme brut*, non la *vie* ou l'*inertie*, mais l'*idée de vie* et l'*idée d'inertie*. Notre définition donc, quoique subjective peut-être, n'est pas pour cela arbitraire; et il en est une épreuve facile à faire, c'est, quand on croira trouver une différence objective entre la vie et l'inertie, qu'on fasse consister cette différence dans une force ou dans une combinaison, de chercher à préciser cette différence; on retombera infailliblement, croyons-nous, sur notre définition. Désormais donc, quand nous par-

lerons d'être vivant et d'être inerte, nous entendrons par là l'être considéré comme vivant, et l'être considéré comme inerte.

L'être vivant, disons-nous, existe dans le temps et l'espace hétérogènes; il est une succession de phénomènes, succession parfaitement déterminée, qui fait de son existence une suite d'instants dissemblables. Chez lui, le temps est un facteur essentiel, inéliminable; l'être vivant ne peut être pris indifféremment hier, aujourd'hui ou demain, il doit être pris entre deux limites dans le temps; et encore, ces limites que notre esprit est astreint à poser pour ne pas se lancer dans l'infini, sont elles-mêmes des abstractions qui ne nous permettent de saisir qu'imparfaitement l'être lui-même. C'est un besoin pour moi d'étudier la vie de ce grain de blé depuis le moment où je le mets en terre jusqu'à la mort de la plante qu'il a produite; mais pour la connaissance de ce qu'il est réellement, il me faudrait remonter au premier grain que sema la main du Créateur, et poursuivre dans l'avenir le sort de sa postérité. L'être vivant, dans l'espace, n'est pas un composé homogène, divisible à l'infini, mais il est essentiellement composé de parties diverses, réunies dans l'unité; il est l'unité de sa diversité, unité plus ou moins concrète, comme cela se voit par la comparaison entre l'individualité des animaux et celle des plantes, mais qui existe nécessairement, ne fût-ce que dans la cellule primitive où il a commencé de vivre. Dans la nature brute, au contraire, les parties hétérogènes, ne sont que des corps différents enclavés dans un autre corps; un morceau de mosaïque n'est pas un corps, mais plusieurs corps.

Tranchons de plus en plus cette différence de l'être

vivant avec l'être inerte. Quand on chauffe du soufre, il passe par différents états et par différents aspects, qui se présentent toujours dans le même ordre, et l'on ne peut obtenir l'un de ces états qu'après avoir obtenu tous ceux qui le précèdent ; ou, pour employer un exemple plus vulgaire, la glace chauffée ne se réduira pas en vapeur avant d'avoir été convertie en eau, et cette eau n'atteindra pas une température de cinquante degrés avant d'avoir passé par celle de quarante-neuf degrés. Les phénomènes, en un mot, se présenteront dans un ordre déterminé.

Quelle différence y a-t-il entre ce phénomène et celui de la vie ? D'abord, ces propriétés de la glace sont les mêmes toujours ; je puis les lui faire manifester de la même manière aujourd'hui ou demain ; le temps est ici homogène ; la place du phénomène dans le temps est indifférente. L'étendue elle-même du phénomène est arbitraire. Que je chauffe la glace avec lenteur, que j'augmente sa température d'un degré d'heure en heure, par exemple, les phénomènes se produiront toujours les mêmes, mais avec lenteur ; si, au contraire, je l'expose tout d'un coup à une température élevée, les phénomènes se produiront rapidement, et tendront à apparaître pour ainsi dire simultanément ; le temps entre dans ce phénomène, toujours comme homogène ; j'ai besoin du temps sans doute, mais d'un espace de temps arbitraire. Il n'en est pas de même pour le corps vivant, et si même pour certains êtres, dans les classes inférieures, quelque chose d'analogue a lieu, la distance reste immense ; les phénomènes de la vie demandent, *pour se produire de la même manière*, le temps où ils se produisent, et non un temps antérieur ou postérieur ; et de plus, un temps d'une longueur déter-

minée : on peut avancer ou retarder la maturité d'une plante, mais, en général, le phénomène résultant est différent ; et, en tout cas, cette contrainte n'est possible que dans certaines limites (1).

§ 2. — DE LA SCIENCE DES CORPS INERTES.

Mais là ne se bornent pas les conséquences de cette abstraction dont nous avons maintenant acquis la conscience.

De ce que l'ambre jaune frotté attirait, déjà du temps des anciens, la paille et les choses légères, nous pouvons affirmer qu'il le fait encore aujourd'hui et qu'il le fera toujours. *Les lois de la nature inerte sont éternelles et universelles*, conséquence immédiate de ce que les

(1) C'est ici surtout qu'apparaît avec évidence la subjectivité des idées de *vie* et d'*inertie*. Dans la réalité, si, exempt de toute préoccupation philosophique, j'étudie la nature inerte, les phénomènes se présentent aussi dans un ordre déterminé, et demandent pour se produire de la même manière, un certain temps et un certain espace. Dans la formation d'un cristal, par exemple, si l'évaporation de l'eau est lente, les cristaux acquerront un volume plus considérable que si l'évaporation est rapide ; ou, pour me servir d'un exemple plus vulgaire encore, le verre chauffé lentement augmente de température sans se briser, et se brise si on l'expose tout d'un coup à une grande chaleur. D'un autre côté, je suis obligé de regarder une plante méridionale comme pouvant croître en Laponie, si je la mets dans des conditions convenables. Et cependant, en tant que je considère la formation d'un cristal comme un phénomène de la nature *brute*, je me contente du point de départ et du résultat final, supprimant par la pensée le temps de la formation, faisant ainsi du temps, une chose à ma disposition; tandis que, si je considère le phénomène de la formation d'un être *vivant*, ma pensée laisse cet être vivant se développer *de lui-même*, passer par ses états successifs, et reconnaît ainsi, d'une certaine façon, son impuissance à accélérer ou à retarder ce développement.



corps inertes existent dans un temps et un espace homogènes; de ce que pour eux le *demain* est égal à l'*aujourd'hui* et le *ici* au *là* (1). Je puis dire : *il est absolument nécessaire qu'un volume d'oxygène se combine à deux volumes d'hydrogène pour former de l'eau*, dès qu'il a été démontré *une fois* que le phénomène de la production de l'eau a lieu de cette manière.

Pourtant il pourrait se produire ici un phénomène imprévu : c'est que de l'oxygène ne se combinât pas avec l'hydrogène dans cette proportion, ou que le composé résultant fût non de l'eau, mais un corps isomérique. Ceci semble nous mettre en contradiction avec nous-même. Voyons ce qu'il y a au fond des lois physiques, examinons sur quoi repose leur apodicticité. Tout dépend de la définition de l'*oxygène*; si ce nom s'applique à la *substance* de l'oxygène, s'il est *nom propre*, le nom d'une chose inconnue, mais plus ou moins reconnaissable, alors les lois physiques ne sont pas apodictiques. Mais elles prennent ce caractère si le terme *oxygène* s'applique à un corps *défini*, à un *concept*, à une chose dont on borne la définition à une qualité bien connue. Dans le premier cas, la proposition, *l'oxygène est...* est une définition *de chose* ou *réelle*, comme s'exprime l'ancienne logique; dans le second cas, la

(1) Les lois de la nature vivante sont aussi universelles et éternelles, parce que ces lois portent sur *l'espèce*, qui est *l'idée de l'être vivant subsistant dans un temps et un espace homogènes*, traversant, en restant identique à lui-même, et les temps et les lieux. En tant que le caractère d'un être vivant est *considéré* comme *individuel* et non comme *spécifique*, ce caractère ne donne lieu à aucune loi. Et l'on peut dire en général, que *toute science se compose des lois universelles et éternelles.* C'est pourquoi, si la couleur noire n'est pas un caractère *spécifique* des corbeaux, je ne puis dire : *Les corbeaux sont noirs toujours et partout.* (Cf. Mill, *Log. ind.* passim.)

définition est *de nom*, ou *nominale*, (ou encore *génétique*). Ainsi, si je nomme *oxygène*, le corps qui se rend au pôle positif, quand on décompose l'eau distillée par une pile, dans telle ou telle circonstance (1), et que sur ce même corps je fasse des expériences, qui mettent en évidence certaines lois, ces lois sont apodictiques pour l'oxygène obtenu dans ces circonstances; j'ai *nominalisé* la définition de l'oxygène; j'ai posé une *définition adéquate génétique*; j'ai dit comment on obtient l'oxygène; et cela est très-important à noter, car, dans ce cas seul, *je puis dire que l'oxygène n'est pas du diamant*. Si, au contraire, l'oxygène est le nom d'une chose, d'une cause réelle que je ne connais que par ses effets, au lieu d'être, comme tantôt, le nom de la cause d'un certain effet déterminé, alors, je ne puis plus affirmer que cet oxygène pris au hasard, sans avoir égard à la manière dont on l'a obtenu, se conduira de telle ou telle façon dans une circonstance donnée (2). A ce point de vue,

---

(1) Ce complément est nécessaire; et c'est là la difficulté d'obtenir une définition adéquate de l'oxygène (comme de toute cause réelle). Il est possible, en effet, qu'en opérant sur de l'eau distillée avec un appareil de Volta, dans la planète Jupiter, le résultat ne soit pas une décomposition du liquide en tout semblable à la nôtre. La définition de l'oxygène ne serait adéquate que si, par exemple, les différents corps simples n'étant que des états allotropiques d'un corps unique, on pouvait les définir par l'arrangement géométrique des molécules.

(2) Nous pouvons citer à l'appui de ceci un fait bien remarquable. Le fer se dissout facilement dans l'acide nitrique étendu d'eau; cependant, s'il a été préalablement plongé dans de l'acide nitrique concentré, il est devenu *passif*, et l'acide étendu n'a plus d'action sur lui. On ne peut donc pas affirmer d'un morceau de fer quelconque, *sans avoir égard à la manière dont on l'a obtenu*, en d'autres termes, *sans avoir égard à son état antérieur*, qu'il se dissoudra dans l'acide nitrique étendu.

je ne puis pas dire que l'oxygène n'est pas du diamant, car l'un et l'autre peuvent n'être que des formes différentes d'une même substance.

Ainsi encore, si je nomme *triangle* une figure fermée à trois côtés rectilignes, je puis affirmer que ses trois angles font deux angles droits; mais si *triangle* est le nom donné à une certaine forme réelle à trois angles, une face d'un cristal, par exemple, alors je n'ai pas le droit d'affirmer que ses angles font deux droits. L'esprit peut attribuer à ses *droites* et à ses *cercles* tout ce qu'il y trouve, mais ne doit pas en attribuer les propriétés aux *barres* et aux *ronds* de la nature, pour nous servir d'une expression de Pascal enfant (1).

Ainsi donc, nous pouvons dire contre Whewell et contre Mill à la fois : la neige est blanche *toujours* et *partout*, parce que tout corps analogue, mais d'une couleur différente, ne portera pas ce nom ou ne le portera que par métaphore. Si *neige* est l'état de l'eau, connu sous ce nom, il m'est permis de dire : *La neige est blanche*; si l'on entend par *neige* autre chose que je ne connais pas ou que je connais peu, alors je ne puis plus dire qu'*elle est blanche*, mais aussi je n'ai pas

(1) Ainsi, ce que dit Mill de la facilité de donner en géométrie des définitions adéquates, est tout simplement une erreur. Je puis, dans toute science, donner des définitions adéquates; seulement ces définitions peuvent ne pas répondre aux choses *réelles* ; en géométrie cependant les définitions répondent jusqu'à un certain point aux choses réelles, comme Mill le remarque lui-même, parce que les prémisses de cette science sont objectives; et c'est pourquoi elle explique les faits réels. La prémisse de l'astronomie mécanique étant supposée objective aussi, la mécanique céleste est une science *vraie*, quoique *idéale* au même titre que la géométrie, et n'expliquant qu'approximativement les faits réels, c'est-à-dire la route effective des planètes. Nous reviendrons d'ailleurs sur ce point dans l'appendice.

de *loi scientifique*, j'ai une proposition à laquelle la science n'a rien à voir.

Il n'y a donc pas de différence essentielle entre la certitude des lois physiques et celle des lois mathématiques; entre cette proposition : L'eau est composée de deux volumes d'hydrogène et d'un volume d'oxygène combinés; et cette autre : Les rayons d'un cercle sont égaux. Si un liquide m'est présenté et que sa composition ne soit pas celle indiquée plus haut, je nierai que ce soit de l'eau avec autant de fondement que je refuserai de reconnaître un cercle dans une figure où les rayons ne seront pas égaux.

C'est donc sur une abstraction de notre esprit que repose l'apodicticité des lois de la nature; et le fameux axiome sur la constance et l'invariabilité de ces mêmes lois, n'en est lui-même qu'une conséquence. Cette abstraction est peut-être ce que M. Ueberweg appelle l'*idéalisation*; avec la différence que ce terme *idéalisation* est vague, et n'indique pas la véritable nature de l'opération qui nous y conduit, ni surtout l'importance des résultats, des effets de cette opération. Cette solution concilie à la fois l'empirisme et l'idéalisme, Mill et Kant.

Rien d'étonnant que, dans la nature, il n'y ait pas de ligne parfaitement droite, de cercle parfait, d'ellipse exacte; bien plus, l'existence de telles figures y est impossible. Comment tracer un cercle dans un espace et un temps hétérogènes, quand les branches du compas, se dilatent ou se contractent, d'un instant à un autre, d'un point à un autre, grâce aux variations incessantes de la température; quand les pointes s'usent; quand le papier n'est pas plan, etc.? Rien d'étonnant qu'un corps lancé, même verticalement, ne suive pas une ligne droite, la

terre fût-elle immobile et dans l'espace et autour de son axe. Dans la nature, en effet, il n'y a rien de fixe, rien d'éternel que la substance. D'un autre côté, les droites, les cercles, les paraboles de notre esprit, ne sont pas des moyennes approximatives; ce sont des types, imitant sans doute les phénomènes réels, parce que nous les avons obtenus par une première approximation, par la supposition qu'il n'y ait pas de diversité dans l'étendue et la durée; mais, par cela même, invariables, au-dessus de l'étendue et de la durée. Voilà pourquoi ces types existent pour les habitants de Jupiter comme pour nous ; car les habitants de Jupiter les obtiennent nécessairement, quand ils font de l'espace et du temps des abstractions, et rendent ainsi homogènes l'étendue et la durée réelles.

Nous nous rapprochons aussi de Kant. En effet, quand nous constatons dans la nature l'accord avec les lois de notre esprit, nous y retrouvons ce que nous y avons mis : nous y avons mis l'ordre et l'invariabilité; nous y retrouvons l'ordre et l'invariabilité; nous y voyons ce que nous pouvons y voir; nous la voyons comme nous pouvons la voir. L'abstraction est une opération de notre esprit, et la nature est pour nous devenue abstraite : elle nous montre des lignes droites, des cercles parfaits; nous y découvrons des corps simples, des corps purs, de l'eau distillée, du nitrate de potasse, du carbonate de chaux, tandis qu'elle nous fournit des mélanges, l'eau de la mer et des fleuves, du salpêtre, de la craie et du marbre.

Cette manière de considérer le corps, pour ainsi dire, en dehors de l'espace et du temps, nous donne la raison de la méthode que l'on suit pour en découvrir les propriétés ou arriver à des lois, c'est-à-dire, de la *méthode expérimentale.*

Ce corps que je tiens à la main, manifeste un certain effet quand je le place dans certaines conditions; l'énonciation de cet effet est une loi *universelle*, j'ai le droit de dire: ce corps se manifeste de cette façon dans tel cas. L'expérience, c'est la vue claire des effets d'une cause donnée; une seule expérience suffit pour donner une pareille loi. Seulement, si le principe de l'expérience est clair, la mise en pratique, l'art d'interpréter l'expérience, est plus difficile. Cet art suppose plusieurs choses : 1° La définition précise de la chose à étudier. Je dois savoir comment je puis obtenir ce corps, ce qu'il est au moment même où je le soumets à l'expérience; je dois en avoir *la définition nominale* et *génétique*; je dois pouvoir dire, par exemple: ce corps, que je nomme *oxygène*, est ce qui se rend au pôle positif de la pile quand on décompose l'eau distillée — ou toute autre définition analogue. Aussi que fait le chimiste? il se garde bien d'opérer sur les corps tels que la nature les fournit, c'est-à-dire modifiés, altérés, mélangés, *impurs*, pour me servir de l'expression consacrée; une expérience faite sur ces corps dans de semblables conditions serait radicalement vicieuse. Mais il commence par les purifier, les simplifier; il met dans son creuset un corps *idéal*, dont il possède la définition adéquate et génétique. 2° La connaissance précise des circonstances où l'on opère, en présence desquelles on fait agir le corps. Cette règle est analogue à la précédente et à la suivante. Ainsi le chimiste, pour ne pas avoir à faire à une trop grande complication de circonstances, écarte, autant qu'il est en lui, toute cause extérieure de trouble, il opère dans le vide, ou dans un gaz dont il a d'avance déterminé l'indifférence, la neutralité; il note la température, la pression, l'état électrique et hy-

grométrique de l'air, etc. ; en un mot, il opère, autant que possible, dans un espace homogène et sans qualité active ; 3° Enfin, l'appréciation exacte de l'effet produit. Il faut suivre l'effet depuis le moment où il se manifeste, jusqu'à son dernier accomplissement, et non se contenter du résultat final qui n'en est qu'une partie.

Quand ces trois règles ont été suivies, une seule expérience, nous le répétons, suffit pour établir la loi. Si, en général, plusieurs expériences sont nécessaires, c'est qu'il n'est pas toujours possible à l'homme d'écarter à un si haut degré les causes perturbatrices, et il n'y a erreur que quand l'expérience n'a pas tenu compte de toutes les causes auxquelles on peut attribuer l'effet produit.

Cependant là ne se borne pas le champ de l'expérience. Sans doute, la méthode que nous venons de décrire, arrive infailliblement à nous faire connaître les propriétés *d'un corps donné*. Mais la science veut arriver à des lois qui conviennent à *toute une classe de corps*. C'est ainsi qu'elle nous donne les lois de la chute des corps pesants, de la réflexion, de la réfraction, etc. ; lois qui n'appartiennent pas à un corps particulier, mais à tous les corps connus. Comment opèrera le savant quand il aura à étudier un phénomène général, tel que celui de la pesanteur ? Force lui est bien de prendre des corps *individuels* ; mais comme il ne peut les soumettre tous à un examen — ce qui serait absolument nécessaire pour établir une loi à l'abri de toute objection — il choisit des corps particuliers, et il dispose l'expérience de telle sorte qu'elle ait, autant que possible, un caractère *général*, qu'elle fasse ressortir le caractère du *genre* (du corps pesant) et non de l'*individu* (du fer ou du plomb). C'est ainsi que les lois

que les expériences de Galilée ou celles d'Atwood me permettent d'énoncer, *sont, non des lois tirées de la généralisation d'un fait particulier, mais la traduction mathématique d'un fait général.*

Mais, quoi que l'on fasse, ces lois ne sont presque jamais que des inductions plus ou moins légitimes, et l'on n'a pas le droit de dire d'une façon absolue : *tous les corps sont pesants.* Sans doute, la loi de la pesanteur nous apparaît aujourd'hui avec un caractère prononcé de généralité ; l'idée de pesanteur s'attache intimement dans notre esprit à celle de corps ; mais on sait qu'il n'en a pas toujours été ainsi, et l'on est encore plus ou moins dans l'usage de parler du calorique, de l'électricité, etc., comme de fluides impondérables (1).

Dans quels cas cependant une loi est-elle vraiment générale? Lorsque, pour l'établir, on aura éliminé par des expériences répétées, les qualités individuelles du corps sur lequel on expérimente. Prenons pour exemple le cas de la machine d'Atwood : La chute du poids pourrait provenir de la nature particulière du métal qui le compose, de sa forme, de sa masse, du milieu ambiant, etc. — je change le métal, je modifie la forme, la masse, j'opère dans le vide, etc. — l'effet reste le même. Si j'ai tenu compte de toutes les circonstances qui pouvaient avoir une influence sur l'effet, la con-

(1) Il est, du reste, d'autres lois où le caractère inductif est plus prononcé, et qui pourraient même être le résultat d'une induction vicieuse; telles sont la loi, dite de Mariotte, sur le rapport du volume des gaz à la pression ; la loi de la dilatation des gaz ; la loi newtonnienne sur le rapport du pouvoir réfringent et de la densité. De quelque nombre de faits qu'on suppose ces lois étayées — et l'on en connaît maintenant qui les contrarient — on ne pourrait cependant pas conclure à leur généralité absolue.

clusion tirée de l'expérience porte un caractère général. C'est ce qui a lieu dans les mathématiques, et particulièrement en géométrie, où les démonstrations (les expériences) sont toujours très-faciles à établir, où, comme nous le verrons, par la nature même de l'objet de la science, toute influence secondaire se trouve éliminée d'elle-même. Pour démontrer que *les trois angles d'un triangle sont égaux à deux droits*, je choisis un triangle *particulier*, et plaçant ses trois angles à côté l'un de l'autre, j'observe qu'ils font deux droits. Ma proposition est générale, non point parce que ce triangle est *quelconque*, ou parce que je conçois la possibilité de répéter la même opération sur tous les triangles possibles, ce qui reviendrait à considérer ma proposition comme possible, comme *virtuellement* démontrable, mais parce que la manière dont je démontre la proposition, mon *expérience* (1), est indépendante de la grandeur du triangle, et de la nature des angles — de même que l'expérience de la machine d'Atwood est indépendante de la nature des matériaux qui entrent dans cette machine, de la forme des poids et de leur masse. Mon expérience, en un mot, a porté sur un triangle *genre*, et non sur un triangle *individu*.

Ajoutons à ce propos un mot sur le concours de tous les savants à l'édification d'une science. En général, une proposition démontrée par un savant est acceptée ou acceptable par tous sans contrôle; ainsi, en chimie, on travaille sur les données de quelques chimistes célèbres; Kepler travailla sur les données de Tycho-Brahé, Newton sur les résultats de Kepler; nous nous

(1) Voir aussi, pour ce terme *expérience*, nouveau en matière de géométrie, le paragraphe suivant.

fions aux assertions des historiens, des géographes, des voyageurs, de tous les observateurs et expérimentateurs de tous les temps et de tous les lieux. C'est que, pour nous, l'observateur n'est pas Kepler; le géomètre, Euclide ou Legendre; le chimiste, Regnault; mais l'*homme*, c'est-à-dire l'*être intelligent*, l'*espèce* et non l'*individu*. Et lorsque nous soupçonnons que c'est l'*individu*, ou l'homme pourvu d'yeux plus ou moins bons, corrompu par plus ou moins de passions et de préjugés, doué d'un jugement plus ou moins sûr, lorsque nous soupçonnons, dis-je, que c'est cet individu-là qui a vu, jugé, conclu, alors nous mettons ses résultats en doute et nous recommençons l'expérience déjà faite.

Nous avons distingué, dans ce qui précède, entre les lois universelles et éternelles, et les lois générales : les premières portant sur un corps déterminé, défini; telles que : *le fer est pesant*; les secondes portant sur toute une classe de corps; telles que : *les corps sont pesants*. Les unes, avons-nous dit, sont le résultat d'une abstraction, tandis que les secondes sont fondées sur une induction plus ou moins légitime. Les unes et les autres sont concentrées dans cet axiome empiriste : *La nature procède par lois invariables et simples*.

Nous ne reviendrons pas sur ce que nous avons dit dans le chapitre précédent sur la légitimité de cet axiome, ni sur son impuissance à confirmer les faits particuliers. Nous voulons maintenant l'examiner à un autre point de vue. Il comprend deux affirmations : c'est de la première que nous allons nous occuper d'abord.

Nous avons dit que l'invariabilité (universalité et éternité) des lois de la nature est fondée sur une abstraction de notre esprit; cet axiome, au contraire, la pose

comme un fait, placé en dehors de nous, et que nous constatons par l'expérience. Or, à quoi reconnaissons-nous l'invariabilité d'une loi? à ce que le phénomène qui en est l'expression reste toujours le même. Mais si ce phénomène devenait autre, dirions-nous que la loi a varié? Non; nous dirions, au contraire, que nous avons à faire à un autre phénomène, et la loi serait sauve. Nous nous expliquons par un exemple : c'est une loi invariable de la nature que le palmier germe avec un cotylédon (1); qu'il se mette à germer avec deux cotylédons, nous n'accuserons pas la nature de n'être pas restée fidèle à sa loi, mais la plante nouvelle, nous ne l'appellerons plus *palmier*, pour autant que c'est là le nom d'une plante monocotylédone. Nous sommes ainsi ramenés à une théorie analogue à celle que nous fournissait la proposition *la neige est blanche*. Et en effet, quand la nature change avec les temps et les climats, qu'elle ne fait que revêtir de nouveaux aspects depuis le jour où le monde a été lancé dans l'espace, que peut être l'invariabilité dans cette succession de phénomènes, qui paraissent pour disparaître ensuite, avec les lois qui les gouvernent Qu'existait- il autrefois? Que nous réserve l'avenir? Mais bien plus, quel que soit le phénomène dont la science s'occupe, elle le traduit toujours par une loi invariable. La terre tourne en 365 jours

(1) Il est tellement impossible de se figurer que la nature ne procède pas par lois invariables que quand on veut choisir un exemple de variabilité, on tombe dans l'absurde, le non-sens. Il est clair que le lion reste toujours lion, comme l'homme reste toujours l'homme, quoique les lions d'aujourd'hui soient les mêmes que ceux du temps des Grecs, tandis que nous ne sommes pas les mêmes que les Grecs : c'est que, pour le lion, c'est une loi *invariable* de rester le même, et pour nous, de progresser.

autour du soleil, et si loin que nous remontions dans la séric des siècles, cette période nous semble avoir toujours été la même — est-ce là une loi invariable? Oui, sans doute. Mais supposez que le mouvement de la terre, au lieu de rester constant, s'accélère, comme c'est le cas pour la comète d'Encke, nous aurons une loi invariable qui s'énoncera comme suit : le mouvement de la terre s'accélère d'année en année. Allons même plus loin : admettons qu'aucune espèce de loi ne règle l'accélération ou le ralentissement du mouvement de la terre; nous ne laisserons pas de dire sous forme de loi invariable : la terre, dans son mouvement autour du soleil, ne suit aucune loi. Quelque bizarre, quelque désordonnée que nous nous figurions la nature, nous la voyons toujours comme soumise à des lois : n'était-ce pas une loi pour la fortune inconstante, d'être *constamment* inconstante? C'est ainsi, pour nous servir d'une comparaison, que l'observateur placé entre le soleil et un nuage qui se résout en pluie, voit infailliblement devant lui, quelle que soit la forme du nuage, l'arc aux sept couleurs s'étendre symétriquement des deux côtés de son horizon.

La raison de ce fait est facile à établir. Un phénomène, en tant que déterminé, saisi par l'intelligence, défini, en tant qu'il est *ce* phénomène, n'est pas *autre*, et nous ne pouvons nous imaginer qu'il devienne *autre;* il reste nécessairement *ce* phénomène (1). Mais il ne s'ensuit pas que, dans l'ensemble des événements naturels, ce phénomène ait nécessairement une place, que la constance de sa production importe à l'ordre universel : le caractère d'invariabilité que l'esprit lui attribue

(1) Comparez : *Logique de Port Royal*, IIe partie, chap. 12.

est tout subjectif, et résulte de ce que ce phénomène a été reconnu par lui, et par suite défini.

Cette critique vient donc confirmer de nouveau la théorie que nous avons émise sur ce point. Voyons à quoi nous conduira la critique de la seconde partie de l'axiome, que *la nature procède par lois simples.*

Qu'est-ce qu'une loi simple ? En quoi consiste la simplicité d'une loi ? Ce n'est pas dans les nombres qui l'expriment ! que les corps s'attirent en raison inverse de la simple distance, ou du cube de la distance, ou du logarithme de la distance, la loi n'en sera pas moins considérée comme simple. Ce ne peut être dans le nombre de mots qu'il faut pour l'énoncer, ou dans l'effort d'esprit nécessaire pour la comprendre ; la loi de la rotation des corps ou celle de l'attraction de deux ellipsoïdes pourrait n'être pas dans ce cas.

N'y aurait-il pas ici abus de mots ? Le terme propre à employer ici n'est-ce pas celui de *généralité ;* et ne disons-nous pas d'une loi qu'elle est d'autant plus simple qu'elle est plus générale, ou qu'elle s'applique à un plus grand nombre de faits ? Supposons donnés, par exemple, trois phénomènes A, B, C, qui ont quelque chose de commun ; cependant le phénomène A diffère à la fois de B et de C, et il existe une cause de ces différences. Si je fais abstraction de ces différences, ces trois phénomènes deviennent identiques et s'expliquent naturellement par une seule et même loi ; si je fais entrer en ligne de compte la différence du phénomène A au phénomène B, il me faut une seconde loi pour en rendre raison ; et de même une troisième loi est nécessaire pour expliquer en quoi A diffère de C ; de sorte que le phénomène A, en définitive, ne s'explique que par trois lois ; et à la rigueur,

la première loi explique, non pas les phénomènes A, B et C, mais seulement une partie du phénomène A décomposé en phénomènes plus simples, un phénomène plus général que A. L'attraction, dit-on, explique tous les mouvements des corps célestes ; ceux de la Terre, de Mars, de Jupiter. Soit, mais elle n'explique pas, bien loin s'en faut, le mouvement réel de la Terre, ce en quoi il se distingue de celui de Mars. Ainsi, entre autres, elle ne donne pas la distance de la Terre au Soleil; et l'astronome, qui veut rendre compte du phénomène de la trajectoire de notre planète, commence par poser deux prémisses, à savoir : la distance de la Terre au Soleil, et l'attraction; prémisses qui sont absolument sur le même rang dans la solution du problème. N'est-ce pas ainsi encore qu'en chimie la théorie générale de la combinaison ne suffit pas pour expliquer la formation de l'eau, mais qu'il faut en outre la connaissance des propriétés de l'oxygène et de l'hydrogène?

Maintenant en est-il de la généralité comme de l'invariabilité? Est-ce encore une épithète accordée spontanément par notre esprit aux lois de la nature? Oui, parce que tout phénomène défini est un phénomène général. Pourquoi disons-nous que tous les corps sont pesants? parce que nous appelons corps ce qui est pesant; et nous ne pourrions ainsi nous exprimer, si les fluides impondérables étaient regardés comme des corps. Les planètes se meuvent dans le même sens, dans des ellipses d'une faible excentricité, toutes situées à peu près dans le même plan, et dont le Soleil occupe un des foyers, loi générale, parce que nous ne donnons pas le nom de planètes aux autres corps qui, comme les comètes ou les satellites, n'obéissent pas à ces lois.

Mais, nous dira-t-on, on ne peut nier cependant qu'il y a des lois objectivement générales, telles que la suivante, par exemple : tous les corps célestes obéissent à l'attraction? Nous pourrions demander à notre tour : pourquoi les masses des corps célestes ne sont-elles pas égales? Pourquoi quelques planètes ont-elles des satellites, et d'autres pas? Pourquoi Saturne seul a-t-il un anneau? L'existence de l'anneau de Saturne est un phénomène isolé; l'existence de satellites autour de quelques planètes, un phénomène plus général, pour autant que je fais abstraction du nombre plus ou moins grand de satellites; de même, l'attraction est un phénomène général, si je fais abstraction des différences des masses et des distances. Et puis, que peut-on affirmer, quant à la généralité du phénomène de l'attraction? Tous les corps célestes que nous voyons autour de nous et dans les espaces les plus éloignés que nous découvrent nos instruments, fussent-ils soumis à la loi de Newton, n'est-ce pas là encore un phénomène isolé dans l'immensité de l'univers? D'un autre côté, n'y eût-il que deux corps soumis à l'attraction mutuelle, l'intelligence n'en regarderait pas moins ce phénomène comme général, comme devant s'appliquer à tous les corps qui leur ressembleraient. Peu importent à la science les différences essentielles des planètes, l'esprit les supprime, et la loi du mouvement de l'une devient la loi du mouvement des autres. Quel que soit l'univers, nous le concevons toujours comme l'effet d'une cause unique que nous cherchons; tout ce qu'il renferme obéit au moins à une loi générale, celle d'y être renfermé, d'en faire partie, d'être soumis aux causes qui y fonctionnent; toujours, en un mot, il reste pour nous l'*univers*, c'est-à-dire, comme l'indique

l'étymologie, la multiplicité tendant à l'unité. Newton, pour avoir découvert l'attraction, n'a pas vu plus d'unité dans l'univers, que les anciens, qui attachaient les planètes à des cercles et les étoiles à un ciel de cristal; et le géologue ne met pas plus d'unité dans les phénomènes de notre globe, que le Grec qui les expliquait uniformément par des dieux, des génies, des naïades, et des nymphes.

Si donc l'induction nous guide dans nos découvertes, ce n'est pas que la nature soit disposée à dessein de la provoquer, c'est que l'intelligence tend vers l'unité, et elle poursuit cette unité, quel que soit l'ensemble des faits qu'elle considère.

Reprenons la suite interrompue de nos déductions. Les lois se divisent en lois plus ou moins générales suivant qu'elles servent à rendre compte d'un phénomène plus ou moins général; et l'on dit d'un phénomène ou d'une loi (1) qu'il est plus général qu'un autre, quand celui-ci n'est que la traduction des différences de tous ceux qui rentrent dans le premier. La loi de Bode (en supposant qu'elle soit une loi dans le sens propre du mot), portant sur les distances relatives des planètes, est une loi moins générale que celle de l'attraction, puisqu'elle s'applique seulement aux différences entre les mouvements des corps que le Soleil attire.

Un phénomène, avons-nous dit encore, se décompose en phénomènes plus généraux ou explicables par un nombre moindre de lois. Un phénomène est dit *simple* ou *irréductible* quand il s'explique par une loi unique.

---

(1) En commençant ce chapitre, nous avons dit que les lois n'étaient elles-mêmes que des phénomènes; de là, cet emploi d'un terme pour l'autre.

Tout phénomène peut se résoudre en phénomènes simples (1). Tel est le principe que nous mettons à la place de la seconde partie de l'axiome qui fait l'objet de notre étude actuelle.

Nous voici amené à parler de l'*hypothèse scientifique*. Cette décomposition du phénomène est toujours susceptible d'être poussée plus loin ; les phénomènes simples, comme les corps simples de la chimie, ne sont jamais que provisoires, en attendant les progrès ultérieurs de la science. Or, on donne le nom d'*hypothèse* à *l'énoncé d'un phénomène considéré comme simple ou comme irréductible*. C'est une proposition sur la nature du phénomène ; c'est une définition de son essence ; comme, par exemple, les hypothèses suivantes : les corps matériels s'attirent, ou encore, sont des corps qui s'attirent en raison directe des masses et en raison inverse du carré des distances ; la lumière est produite par les vibrations de l'éther, etc. ; dont la première nous apprend en quoi consiste l'essence de la matière, la seconde en quoi consiste l'essence de la lumière. L'horreur du vide comme la pesanteur de l'air, les épicycles comme l'attraction, l'émission comme les ondulations, l'atomisme comme le dynamisme sont autant d'hypothèses scientifiques. Quand on ramène toutes les lois chimiques à la constitution atomique des corps, de même que lorsqu'on ramène les phénomènes célestes à l'attraction, ne fait-on pas une hypothèse sur la nature

(1) C'est ainsi que la trajectoire d'un corps qui tombe perpendiculairement, phénomène très-compliqué en réalité, se ramène à trois phénomènes simples : le mouvement du corps en ligne droite si la terre était immobile dans l'espace ; celui de la terre autour du soleil ; puis sa rotation sur elle-même (abstraction faite de l'air, etc.).

du phénomène simple de la combinaison ou du mouvement d'un astre ?

On dit quelquefois, il est vrai, que l'hypothèse scientifique ne préjuge rien sur la nature intime du phénomène, qu'elle se borne à en énoncer le mode de production sous forme comparative, et que l'exactitude exigerait : *Les corps se conduisent comme s'ils s'attiraient*, et non, *les corps s'attirent*. Mais la seconde de ces propositions est, *tout aussi bien* que la première, une affirmation sur le mode d'agir des corps ; seulement dans celle-là, on ne parle de l'attraction que comme effet, sans faire allusion à la cause ; dans celle-ci, on la donne comme l'effet d'une cause inconnue. Sous ce rapport, il est vrai, la seconde manière de parler est plus scientifique, en ce qu'elle laisse entrevoir la possibilité de ramener le phénomène de l'attraction à un phénomène plus simple encore (1).

Il est clair par là que toute science a nécessairement une base hypothétique, qui est l'ensemble des lois simples ou phénomènes simples auxquels elle ramène les faits dont elle s'occupe. Nous verrons que les sciences mathématiques n'échappent pas à cette loi et qu'elles aussi ont besoin de véritables hypothèses, de *postulats* :

(1) Disons cependant que l'on réserve généralement le nom d'*hypothèses* aux énoncés des phénomènes les plus généraux, et que, tout au plus, on donne aux phénomènes moins généraux considérés comme simples le nom d'*hypothèses secondaires*. Mais les unes et les autres portent absolument le même caractère. Disons encore que, dans l'usage ordinaire, il ne suffit pas que le phénomène soit général pour qu'il porte ce nom, il faut qu'il ait servi de base à une théorie. Qui ne voit que la plupart des lois peuvent servir à ce but ? Ne pourrait-on pas, en partant de la loi de Mariotte, construire une théorie des gaz, et alors quelle différence essentielle y aurait-il entre cette loi et celle de Newton ?

toute figure a une grandeur et une forme; l'espace a trois dimensions, etc. Les dimensions, la grandeur et la forme, voilà de quoi se compose tout corps géométrique, voilà à quoi on le réduit. Maintenant, que les hypothèses des mathématiques (arithmétique, géométrie, mécanique) soient plus évidentes, portent mieux le caractère de faits que celles de la physique, de la chimie, de la physiologie, cela dépend de la nature de la science, de sa simplicité même : c'est ainsi qu'en physique, l'hypothèse de l'attraction est mieux établie que celle des ondulations, et celle-ci mieux que celle de l'atomisme ou du principe vital. Du reste, trinité de dimensions, attraction, éther, atome, principe vital, ce sont là tout autant de termes inexplicables, mystérieux, dont l'intuition seule nous permet de saisir le sens ou la portée (1).

§ 3. — DÉDUCTION DE L'OBJET DE LA GÉOMÉTRIE.

L'abstraction au moyen de laquelle nous avons obtenu la science des corps inertes, nous allons la répéter de manière à simplifier au fur et à mesure

(1) Il ne peut être question ici d'une autre méthode qu'ont employée Fourrier et Ampère, le premier dans la théorie de la chaleur, le second dans celle du magnétisme, et qui consiste à partir d'une formule plus ou moins probable, à fonctions et constantes indéterminées, que quelques expériences bien choisies déterminent ensuite. En général, cette méthode est empirique dans l'établissement de son point de départ, et les résultats que l'on tire de la formule une fois obtenue, ne représentent jamais exactement le fait. Il n'y a pas explication des phénomènes; on ne voit pas comment ils se produisent, mais seulement le calcul de leurs effets; l'hypothèse est algébrique, et ne fait pas image; aussi ne peut-elle jamais arriver d'elle-même à l'état de fait incontesté.

l'aspect de l'univers, ou l'objet à étudier. On comprend dès lors que les propositions objectives portant sur la nature de cet objet, soient plus faciles à obtenir, et qu'elles aient été obtenues plus tôt; que la solution des problèmes que l'esprit humain se propose devienne plus immédiate, l'expérience pour trouver les lois idéales plus aisée à établir, et les circonstances perturbatrices plus facilement éliminables.

Or, dans l'univers considéré comme inerte, l'espace et le temps reparaissent comme hétérogènes; l'abstraction première, comme toute abstraction, n'a pas été complète; nous avons fait de l'espace et du temps des réceptacles indifférents; les corps pouvaient y être ici ou là; mais, pour autant que les corps sont les uns ici, les autres là, que leurs actions mutuelles se suivent de manière que l'une a lieu aujourd'hui et l'autre demain, qu'il y a, en un mot, variété dans la nature des êtres, l'espace comme ensemble de ceux-ci, le temps comme succession de leurs états, sont hétérogènes; cet univers est l'objet des *sciences physiques et chimiques.* Mais si nous homogénéifions de nouveau l'espace et le temps, si nous faisons abstraction des différences des corps entre eux, pour n'y voir qu'une seule et même nature, nous aurons l'objet des *sciences mathématiques;* et les principes de celles-ci font naturellement partie des principes de celles-là; de même que les lois chimiques et physiques de la nature brute sont au nombre des lois de la nature vivante.

Comment nous apparaît maintenant l'univers après cette double abstraction? C'est un ensemble de corps soumis à leurs actions et réactions réciproques; leurs différences consistent dans la somme d'actions qu'ils exercent; le temps et l'espace reparaissent comme non

homogènes, en ce que la position, les rapports des corps entre eux changent d'un instant à l'autre, d'un lieu à l'autre. La cause abstraite du mouvement ou du changement se nomme la *force*. En tant que l'on considère les corps comme soumis à des actions de la part des autres corps et comme animés eux-mêmes de forces particulières, on fait de la *mécanique*. Dans la mécanique, le temps est devenu une quantité T, homogène, divisible, entrant dans les formules sous la forme d'une ligne, et dont l'hétérogénéité n'apparaît que dans les résultats, en ce que le mouvement, à un instant donné, est la résultante du mouvement qui précède. Mais il n'en est pas moins vrai que dans l'étude du corps (d'une nature indifférente, ou considéré comme *substratum* et support de la force), même à l'état de mouvement, ce n'est pas le développement interne que l'on considère, mais on cherche à se représenter simultanément une succession externe de positions, comme lorsqu'on trace sur le papier l'orbite d'une planète dans sa totalité.

Supprimons maintenant les différences, les changements et les mouvements qui proviennent de l'inégalité des forces, l'univers se réduit à un ensemble de *figures*. La science des figures est la *géométrie*.

A quel titre reparaîtra l'hétérogénéité du temps et de l'espace? Parcourez de l'œil l'ensemble des objets qui composent l'univers géométrique, engendrez-le par le mouvement de votre rayon visuel, vous passez successivement d'un point à un autre, et les points successifs, les *figures* successives sur lesquelles se portent vos regards, sont différents d'aspect, de position, de propriétés (tels sont, par exemple, les différents points ou les différents arcs d'une ellipse), et par la suppres-

sion de toute distinction entre les figures, il ne reste plus que des unités égales; l'univers devient *nombre*, une collection d'unités. La science qui s'occupe des nombres est l'*arithmétique*. Dans l'arithmétique, la formation des nombres par l'addition successive d'une unité à celui qui précède, est le seul vestige qui subsiste de l'hétérogénéité de l'espace et du temps; les inégalités des nombres entre eux, leurs qualités intimes, leurs propriétés comme nombres premiers, nombres puissances, nombres parfaits, nombres polygones, etc., sont les différences les plus simples que nous puissions voir entre les objets d'un univers numérique. Un pas de plus dans l'abstraction, et la science humaine se réduirait à la *numération* (1).

Ce n'est pas ici le lieu de discuter les principes de classification que d'autres ont émis. Nous dirons seulement que nous ne croyons pas à la possibilité de classer les sciences d'après les facultés de l'esprit humain ou d'après des catégories subjectives, ni même de trouver à priori l'objet des sciences que l'homme a inventées. Les grandes divisions que nous avons établies en nous fondant sur un principe unique, concordent avec celles que l'on regarde généralement comme les plus sûres; nous avons fait voir en quoi consiste la simplicité de l'objet d'une science, et quelle est l'opération précise qui lui donne cette simplicité; il n'entre pas dans notre but de poursuivre cette division dans

(1) Il est assez remarquable de voir succéder au monde *nombre* des Pythagoriciens, le monde *géométrique* de Leucippe et de Démocrite; puis le *mécanisme* de Descartes; puis le *dynamisme* physique et chimique de Leibnitz, des matérialistes et de Kant; nous avons eu ensuite le monde vivant, l'*organisme* des panthéistes; puis enfin l'univers *pensée* de Schelling et de Hegel.

ses divers embranchements; il nous suffit d'avoir déterminé l'objet de la géométrie, ou d'avoir déduit rationnellement — tout en opérant sur un fonds expérimental, l'univers — qu'il existe une science des figures. Comme la géométrie comprend plusieurs branches, connues sous les noms de géométrie *synthétique*, *analytique* et *descriptive*, nous allons anticiper sur le livre suivant pour fixer en quelques lignes la place respective de chacune d'elles.

Toute figure a une forme et une grandeur; quand on étudie la figure en elle-même, ses relations de parties à parties, qu'on ramène, en un mot, les questions de grandeurs à des questions de formes, quand, par exemple, pour comparer deux triangles entre eux, on les *transforme* en carrés, on fait de la *géométrie synthétique*. Si, au contraire, les questions de formes sont ramenées à des questions de grandeurs, si, par exemple, la forme d'une figure est donnée par la longueur des coordonnées de chacun de ses points, il y a *géométrie analytique*. Enfin, dans la réunion des deux procédés consiste la *géométrie descriptive ;* ici la figure est donnée par la forme d'une de ses projections sur un plan, et par la distance de chacun de ses points à un autre plan (1). C'est la géométrie synthétique seule qui nous occupera dans cet ouvrage.

Il nous reste à dire quelques mots de la définition de la géométrie.

---

(1) Il est clair que nous ne pouvons, en aussi peu de mots, trancher la différence entre ces trois méthodes, prises ici plutôt comme types que comme réalités ; car il est assez difficile de dire : Ici commence la géométrie analytique, là elle finit. Cette distinction n'a, du reste, qu'une faible importance pour le but que nous nous proposons dans ce travail.

La géométrie, dit-on communément, *est la science des propriétés de l'espace ou de l'étendue.* Cette définition manque de précision : la géométrie ne recherche pas les propriétés de l'espace ; elle les suppose. C'est à la métaphysique qu'il appartient d'établir l'existence de l'espace, sa nature, la manière dont se forme l'idée que nous en avons (1).

Nous ne nous arrêterons pas non plus à cette définition qui, s'appuyant sur les catégories, fait des mathématiques en général la science de la *quantité*. Qu'est-ce que la quantité d'un cercle? d'un nombre premier? Sans doute, on ramène assez facilement, dans beaucoup de cas, la différence qualitative des figures ou des nombres à une différence quantitative, mais on en peut dire autant de la plupart des différences; et M. Comte a raison d'avancer que le problème de la médecine se réduit à ceci : Étant donnée la composition du corps d'un malade, quelle quantité de nouveaux éléments faudrait-il y ajouter pour lui rendre la santé?

M. Comte accepte la définition ordinaire de la science mathématique, à savoir que c'est *la science des gran-*

---

(1) « La plus ou moins grande extension de la limitation, que l'on nomme *volume*, et le *nombre* forment le concept de la quantité. Y ajoute-t-on la *forme* de la limitation, on a l'objet des mathématiques. On dit ordinairement, il est vrai, que les mathématiques s'occupent de l'espace et du nombre; mais en fait, elles ne s'occupent en aucune façon de la nature de l'espace ; ce fut toujours là l'objet de la métaphysique. » Czolbe, *Neue Darstellung des Sensualismus*, I, 4.

Cet auteur dit encore dans le même ouvrage, II, 11 :

« De ce que les mathématiques ne s'occupent pas de la nature de l'espace (elles laissent cela à la métaphysique), je tiens plus exact de dire qu'elles s'occupent des limitations des corps, la grandeur et la forme, et des idées qui en sont dérivées. »

deurs, ou *la science qui a pour but la mesure des grandeurs.* Seulement il la précise et l'approfondit, en montrant à quelle multitude de questions peut conduire la mesure d'une seule grandeur, même de la plus simple, la ligne droite. D'après lui, le but de la mathématique est donc *la mesure* indirecte *des grandeurs*, ou *la détermination des grandeurs, les unes par les autres, d'après les relations précises qui existent entre elles.* Pour le même motif, il maintient la définition vulgaire de la géométrie, *la science de l'étendue*, ou *qui a pour objet la mesure de l'étendue.*

Cette définition nous semble confondre en une seule science la géométrie et les sciences pratiques. A la rigueur toutes les sciences, les arts mêmes, l'astronomie, la chimie, la physique, l'arpentage, etc., seraient du ressort de la mathématique, car les questions dont elles s'occupent, reviennent, en définitive, à des questions de grandeur ou de mesure de l'étendue. Aussi M. Chasles la repousse (1), et en donne une nouvelle, qui est en partie la combinaison des deux premières : La géométrie, dit-il, a pour objet *la mesure et les propriétés de l'étendue figurée.* Les propriétés résultent « des formes et des positions relatives des figures », et elles « comprennent aussi des relations de grandeurs, mais qui sont, en général, simplement des relations de segments rectilignes ou d'angles, et qui n'exigent pas l'emploi du calcul infinitésimal. » Il fait remarquer, du reste, que la

(1) « On serait tenté de croire, dit-il, que cette définition nous vient de quelques arpenteurs romains, si elle ne remonte pas aux Égyptiens, qui, selon la tradition historique ou fabuleuse, auraient créé cette science pour retrouver l'étendue primitive de leurs terres après les inondations du Nil. » (*Discours d'inauguration du cours de géométrie supérieure*).



mesure n'est souvent possible que par la connaissance des propriétés, de manière que la géométrie forme un tout indivisible. Au fond sa définition rentre donc dans celle de M. Comte. Toutes deux d'ailleurs pèchent en ce qu'elles exigent ou des commentaires, comme celle de M. Comte, ou l'explication d'un terme vague, *propriété*, énoncé dans celle de M. Chasles. Les propriétés d'une figure sont, comme nous le démontrerons, les différents modes de génération de cette figure; M. Comte avait déjà signalé l'importance qu'il y a à les connaître; mais il est impossible d'entrer dans des considérations de cette nature à propos d'une définition. Une chose suffit, c'est de préciser l'objet de la géométrie.

La science géométrique étudie les déterminations de l'espace. Cette définition fait rentrer la géométrie dans le cercle des autres sciences proprement dites *naturelles :* la zoologie s'occupe des animaux, la botanique des plantes, la minéralogie des corps inertes dans leur composition et leur forme; la *géométrie* s'occupe des déterminations de l'espace ou des *figures*, et ces déterminations nous sont fournies par la nature même, qui, dans les cristaux, la forme des corps célestes, leurs trajectoires et les mouvements de toutes espèces, les formes plus variées des corps vivants, semble défier la force de l'imagination. Ces formes si diverses, nous les ramenons à des formes idéales, abstraites, fixes, qui servent de *types*, de *mesures;* absolument comme, en chimie, on ramène au type de carbonate de chaux, les différentes espèces de craie et de marbre; comme, en mécanique, en astronomie, on ramène les différentes espèces de mouvement à des formules idéales.

Il y a donc, comme nous l'avons dit dans le premier paragraphe de ce chapitre, une double géométrie. L'une

s'efforce, une forme étant donnée, de la ramener à une forme idéale : on en a des exemples dans la cristallographie, et dans les recherches de Kepler pour déterminer la nature de l'orbite de Mars qui était toute tracée dans le ciel ; cette géométrie expérimentale étudie les corps ou les phénomènes indépendamment de leur substance (et de la substance transformée en force). L'autre, la géométrie théorique, suit une marche inverse, et, partant de principes idéaux, absolus, crée des formes à l'infini et cherche à les faire coïncider avec les formes naturelles. La nature des raisonnements de la première est différente de la nature de ceux de la seconde ; l'une est inductive, l'autre déductive et syllogistique : celle-ci seule nous intéresse aujourd'hui : nous pouvons la définir ainsi :

La géométrie (proprement dite) a pour objet les déterminations ou figures idéales de l'espace.

Il est bon à présent que nous récapitulions ici les principes qui précèdent, spécialement en vue de la géométrie,

Nous observons d'abord des faits géométriques, figures, propriétés, et nous les ramenons à quelques faits généraux ; c'est la science d'observation. Puis de ces faits généraux, qui prennent alors le nom d'hypothèses, ou de postulats et d'axiomes, pour nous servir des termes de la géométrie actuelle, nous reformons ce monde de figures et nous en expliquons les lois. Ces hypothèses ont donc, comme le dit Drobisch (1), une valeur purement assertoire; ce sont des faits énoncés, supposés (posés en tête), et indémontrables, ne se rattachant à aucun autre fait plus général. On

(1) *Logique*, 1851. Préface.

répugnera sans doute à regarder comme des hypothèses analogues à celles des autres sciences, quoique plus simples, les affirmations premières de la géométrie. Nous allons passer en revue et discuter les trois arguments que l'on peut nous opposer.

A. Si loin que remontent nos connaissances historiques, nous trouvons toujours en tête de la géométrie des axiomes semblables. Il ne paraît pas y avoir eu pour elle, succession d'hypothèses nouvelles à des hypothèses anciennes reconnues fausses. — Mais qui sait si autrefois, on n'a pas fondé les faits géométriques sur des principes qu'un homme de génie renversa ? Quand on croyait que les corps célestes se mouvaient en cercle, Aristote en trouvait la raison dans l'excellence et la perfection du mouvement circulaire ; de même, si l'on avait remarqué le fait de la somme des trois angles du triangle égale à deux droits, ne peut-on pas avoir dit, par exemple : le triangle est la figure qui renferme le moindre nombre de côtés ; la somme de ses angles est donc le plus petit nombre possible de droits (1) ?

Il ne suffit pas qu'un principe nous apparaisse comme évident pour qu'il ait toujours été connu : ainsi les principes de la dynamique : *l'action est égale à la réaction ; un corps persiste toujours dans le mouvement qu'on lui imprime ; un corps soumis à une force unique se meut en ligne droite,* n'ont été découverts que bien tard, et nous ne pouvons aujourd'hui nous rendre compte de

(1) Ou encore : le cercle est la plus simple et la plus parfaite des figures, donc son rayon doit se porter six fois sur la circonférence, six étant le plus petit des nombres parfaits. — La métaphysique n'a que trop souvent employé des raisonnements de cette nature. — On sait qu'un nombre parfait est égal à la somme de ses facteurs : $6 = 1 + 2 + 3$; il est donc parfait.



ce retard. Cet argument prouve uniquement que les faits géométriques sont de nature à être plus tôt connus dans leur essence, et à ne pas admettre facilement deux explications ; de même que, lorsqu'il eut été bien établi que les corps célestes se meuvent dans des ellipses, on dut admettre forcément, pour ainsi dire, l'attraction. D'ailleurs, il est de fait que les principes arithmétiques ont été connus plus anciennement encore, parce qu'ils sont, à leur tour, plus simples que ceux de la géométrie.

B. Les principes de la géométrie sont évidents, au contraire des principes naturels, l'attraction, par exemple (argument de Whewell). — Qu'ils nous apparaissent comme plus évidents que ceux de l'astronomie, nous l'avons prouvé ; mais qu'ils soient absolument évidents, c'est une erreur psychologique. Nous citions tantôt les principes de la dynamique : ne nous semblent-ils pas aujourd'hui porter un caractère d'évidence absolue ? Et pourtant les temps modernes en ont vu la naissance. Si, comme il est probable, l'attraction se confirme de plus en plus, n'arrivera-t-il pas un temps où ce principe apparaîtra, sinon comme évident en lui-même, du moins comme la conséquence d'un autre plus évident encore ? C'est à ce point que nous attachons désormais invinciblement à l'idée de corps, celle de *pesant*, ce que ne faisaient pas les anciens. Et il s'est même rencontré des philosophes pour soutenir l'*apriorité* et l'*évidence* des principes de la dynamique, et même de l'attraction.

C. Y aurait-il possibilité, en partant d'hypothèses autres que les axiomes reconnus, de construire une science enchaînée, quoique fausse, comme il arrive dans les sciences dites naturelles ? — A cet argument force nous aurait été de répondre *oui* sans pouvoir

établir par le fait la justesse de notre réponse, s'il ne s'était pas trouvé quelqu'un qui s'est chargé de poser ce fait. Partant d'une idée qui avait été émise par Gauss, M. Lobatschewsky, recteur de l'université de Casan, a essayé de fonder une géométrie qu'il intitule *imaginaire*, dans la supposition que *la somme des trois angles d'un triangle soit plus petite que deux droits.* Il a développé ses idées dans une dissertation qu'on peut lire dans le journal de Crelle (1837, page 295); mais l'auteur y renvoie à un ouvrage publié par lui cinq ans auparavant dans un journal de Casan, que nous n'avons pu nous procurer; il nous a été impossible ainsi de juger, nous ne disons pas de la certitude de ses raisonnements qui semblent rigoureux, mais de la signification fondamentale de son hypothèse (1). Voici d'ailleurs les paroles de l'auteur en tête de sa dissertation:

« Après y (dans le journal de Casan) avoir développé une nouvelle théorie des parallèles, j'ai tâché de prouver que rien n'autorise, *si ce ne sont les observations directes*, de supposer dans un triangle rectiligne la somme des angles égale à deux angles droits, et que la géométrie n'en peut pas moins subsister, sinon dans la nature, du moins dans l'analyse, lorsque l'on admet l'hypothèse de la somme des angles moindre que la demi-circonférence du cercle. Dans les articles cités j'étais même parvenu, par des considérations toujours géométriques, et ne m'appuyant que sur cette nouvelle hypothèse, à donner

(1) Peut-être le triangle est-il projeté sur une surface particulière, ce qui expliquerait comment ses angles deviennent rigoureusement égaux à deux droits quand il est infiniment petit. Il est d'ailleurs facile de démontrer d'une façon tout élémentaire que, la somme des angles étant différente de deux droits, elle s'en rapproche quand le triangle diminue.

des équations fondamentales pour le rapport entre les côtés et les angles d'un triangle rectiligne. »

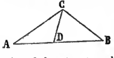
Et parmi les résultats fondamentaux de ces recherches se trouve le suivant :

« Dans l'hypothèse de la somme des angles d'un triangle moindre que deux droits, les équations (13) peuvent être substituées aux équations ordinaires (de la trigonométrie), sans mener à quelques résultats absurdes. » Un autre résultat, c'est que la somme des angles se rapproche de plus en plus d'être égale à deux droits, à mesure que le triangle diminue, et qu'elle est rigoureusement de deux angles droits quand le triangle a ses côtés infiniment petits (1).

---

(1) Nous nous proposons d'établir autre part qu'il est impossible de construire une science *parfaitement enchaînée d'un bout à l'autre*, en l'appuyant sur des prémisses fausses *quelconques*. Avant d'avoir connaissance de l'ouvrage de M. Lobatschewsky, connaissance trop incomplète malheureusement, nous avions cru nécessaire de réfuter l'opinion de Dugald Stewart par quelques faits :

1er Exemple. Si l'on admet que la somme des trois angles d'un triangle est plus grande ou plus petite que deux droits d'une quantité constante δ, il suit immédiatement qu'elle est plus grande ou plus petite que deux droits d'une quantité 2δ, 3δ, 4δ, etc. ; il suffit pour cela de diviser le triangle ABC en deux autres par une droite arbitraire CD ; la somme des angles des deux petits triangles est de quatre droits plus ou moins 2δ, et retranchant les deux angles droits au point D, il reste pour la somme des angles A, B, C, deux droits plus ou moins 2δ.



2e Exemple. Si l'on admet que d'un point, on puisse abaisser deux perpendiculaires sur une droite, par une rotation de la figure autour de l'une d'elles, on prouve qu'on en peut abaisser trois, quatre, et ainsi de suite à l'infini.

3e Exemple. Si l'on admet qu'entre deux points, il peut y avoir deux lignes droites, on peut établir qu'il y en a une infinité; car

Les hypothèses admises, comment procéderons-nous à l'édification de la science? Nous avons dit que cette méthode était l'*expérience*. Le chimiste, qui possède sa liste des corps simples, les combine deux à deux, trois à trois, et attend les réactions qui vont en résulter; le géomètre, qui a des plans, des droites et des points, combinera, lui aussi, ses droites deux à deux, trois à trois, etc.; il fera mouvoir un point à l'extrémité d'une droite pendant que l'autre extrémité passera par un autre point fixe, et il formera un cercle, etc. Puis, ces figures obtenues, il les mettra en présence les unes des autres, il placera des angles dans un cercle, des perpendiculaires dans un triangle, et il regardera ce qui se passe (1). C'est là l'*intuition* de Kant:

---

entre deux quelconques des points de l'une des deux lignes droites on en peut aussi tirer deux, ce qui augmente indéfiniment le nombre des plus courts chemins.

Il est inutile de multiplier les exemples. Cela prouve à l'évidence que toutes les prémisses fausses ne sont pas bonnes à fonder une science qui s'enchaîne; et que cette fausseté même est soumise à des règles qui en font une espèce de vérité. Ce serait un problème très-intéressant de rechercher ces règles.

(1) *Théodore*. Mais si vous trouvez que ce que vos yeux vous ont appris est trop facile, en voici un autre plus difficile. Je vous prouve que le carré de la diagonale d'un carré est double de celui des côtés. Ouvrez les yeux, c'est tout ce que je vous demande. Regardez la figure que je trace sur ce papier. Vos yeux, Ariste, ne vous disent-ils pas que tous ces triangles *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i* que je suppose, et que vous voyez avoir chacun un angle droit et deux lignes égales, sont égaux entre eux? Or, vous voyez que le carré fait sur la diagonale A B a quatre de ces triangles, et que les carrés faits sur les côtés n'en ont que deux. Donc le grand carré est double des autres. — *Ariste*. Oui, Théodore. Mais vous raisonnez. — *Théodore*. Je raisonne! Je regarde, et je vois ce que je vous dis. Je raisonne, si vous voulez, mais c'est sur le témoignage fidèle de mes sens. Ouvrez seulement les yeux, et regardez ce que je vous montre. Ce triangle *d* égal à *e*,

De la définition du triangle et de la définition de la bissectrice d'un angle, vous ne tirerez pas que les trois bissectrices des angles d'un triangle se coupent au même point; *il faut une construction.* Le raisonnement, si raisonnement il y a, consiste toujours dans l'énumération des parties de la figure : ceci est un angle, cela une bissectrice, c'est-à-dire, une ligne équidistante des côtés, etc. De même, le chimiste se dit : j'ai mis là autant d'oxygène, le double d'hydrogène; j'ai maintenant de l'eau, donc, etc.

Mais, ne manquera-t-on pas de nous dire, votre expérience géométrique est de tout autre nature que les expériences des sciences naturelles : ici, il faut une précision minutieuse; là, au contraire, les figures les plus grossières suffisent. — Cette objection provient encore d'une erreur psychologique. Dans le principe, les constructions se font avec la plus grande exactitude, et ce n'est que peu à peu, et à mesure que nous voyons les résultats se vérifier, que nous prenons de plus en plus confiance en nos méthodes, et que nous laissons à l'imagination le soin de redresser les droites tortueuses, ou d'arrondir les cercles anguleux et aplatis. Ainsi le chimiste, après avoir établi, par des expériences multipliées, le rapport des volumes d'oxygène et d'hydrogène nécessaires pour former de l'eau, se contente plus tard, pour ses expériences *démonstratives,* d'un *à peu près* satisfaisant. De même encore, quand, par des essais répétés sur un grand nombre de corps,

---

et *e* égal à *b*; et de l'autre part, *d* égal à *f*, et *f* égal à *g*. Donc le petit carré est égal à la moitié du grand. C'est la même chose de l'autre côté. Cela saute aux yeux, comme vous dites.

MALLEBRANCHE; *Cinquième entretien sur la métaphysique.*

il est devenu certain de l'objectivité de la loi des équivalents, dans la suite de ses épreuves sur les autres corps, il se départ de sa précision scientifique, et corrige par induction, ce que ses expériences peuvent avoir d'incomplet et d'inexact. En un mot, la science, géométrique ou physique ou chimique, *idéalise* le sujet de l'expérimentation.

On nous objectera encore que la construction n'est pas toujours possible même idéalement; ce qui est le cas, par exemple, pour les aires hyperboliques qui sont entre elles comme les logarithmes des abscisses. Mais la démonstration de cette vérité est du ressort de l'algèbre et non plus de la géométrie synthétique, et l'expérience en est le principe, quoiqu'elle ne soit pas de même nature en algèbre qu'en géométrie, et qu'elle y consiste essentiellement dans la comparaison pure et simple de deux grandeurs.

Arrêtons-nous un instant ici. Je suppose que j'aie ramené la proposition que *les trois angles d'un triangle font deux droits* à la comparaison de ces deux quantités, $5+7$ et 12. Or, l'égalité à vérifier, à savoir : $5+7=12$, n'est possible que si *je place* 5 *à côté de* 7, si je les ajoute, si j'en fais une somme; et voilà où gît l'opération expérimentale, voilà l'intuition, rendant possible le jugement synthétique, comme dit Kant (1). J'ai beau voir 5 et 7 séparément, je n'en tire pas qu'ils font 12 ; pour cela il faut que je les rapproche; et cette opération n'est pas un raisonnement, mais une expérience. De même, j'aurai beau examiner l'hydrogène d'une cloche

(1) Plusieurs auteurs, disposés à admettre ce que dit Kant sur les jugements de la géométrie, ne souscrivent pas à ce qu'il dit sur ceux de l'arithmétique. Nous croyons ici renforcer les arguments apportés dans la *Critique de la raison pure.*

et l'oxygène d'une autre cloche, je ne devinerai pas qu'ils sont susceptibles de former de l'eau, il faut que je les combine. Or, cette possibilité de démontrer une vérité géométrique par une autre voie que la voie directe, que l'expérience directe (toujours idéale), n'est pas propre à la géométrie, comme le croiraient quelques-uns. Est-ce qu'on voit directement que les corps s'attirent? Est-ce qu'on mesure directement la longueur de l'oudulation d'une molécule lumineuse? Est-ce qu'on détermine directement l'équivalent du fluor? Est-ce directement même qu'on se fait une idée du travail qui s'opère dans une combinaison? Non, et, comme nous l'avons établi dans notre dérivation des sciences, ces mesures indirectes sont possibles par cela précisément que les principes des sciences les plus simples, sont au nombre de ceux des plus compliquées; et comme toutes les vérités se tiennent, qu'elles forment un réseau dont chaque maille est nécessaire à l'existence de toutes les autres, la connaissance directe de l'une rend possible la connaissance indirecte de l'autre. Nous ne voulons donc pas dire qu'il n'y a que l'expérience géométrique qui puisse établir les vérités géométriques.

Que ceux enfin qui, malgré ce qui précède, refuseraient de reconnaître une méthode expérimentale (1) dans les démonstrations géométriques, comparent la manière dont on établit ces deux vérités : *la terre est ronde*, et *la figure où les angles sont proportionnels aux arcs est un cercle.*

Dans le premier cas, l'observateur se promène le long d'un méridien en fixant une étoile, et remarque

(1) Voir, dans le livre suivant, la citation d'un passage de M. Chasles sur l'analyse et la synthèse, où ce terme est aussi employé.

que l'élévation de l'étoile augmente proportionnellement au chemin qu'il décrit en avançant vers le pôle. C'est bien là une expérience ; mais n'est-ce pas aussi le même raisonnement que l'on fait pour établir que la figure qui jouit de la propriété énoncée est un cercle? Ne montrerai-je pas ici qu'à mesure que je m'éloigne d'un point fixe sur une circonférence, l'arc décrit est proportionnel à l'angle que fait le rayon passant par ce point fixe, avec celui qui passe par le point où je suis?

La science est maintenant édifiée : quel est le fondement de notre certitude à son égard? La question est double. Si l'on veut demander par là le fondement de la certitude *subjective*, du caractère *apodictique* des résultats de la science, nous répondons que c'est l'abstraction première qui a servi de point de départ, abstraction qui emporte avec elle l'universalité des résultats qu'on mettra au jour. Si, au contraire, on entend par là la certitude objective, la certitude de la *vérité* de la science, cette certitude ne peut reposer que sur la *vérification*, la comparaison des phénomènes idéaux avec les phénomènes réels, les *observations directes*, comme dit M. Lobatschewsky. S'il n'y a pas concordance essentielle, et si le système est bien construit, le système est faux de la base au sommet. Nous disons donc avec Mill qu'on suppose qu'il y ait des choses qui correspondent aux objets de nos idées; mais nous ajoutons, et c'est le cas pour la géométrie, que des objets correspondent à nos idées, quand les prémisses de la science sont elles-mêmes des objets, qu'elles sont tirées des choses, et non arbitraires.

Il nous reste à examiner, en quelques mots, le fondement que M. Ueberweg et d'autres donnent à la certitude mathématique.

Pour ce qui regarde la certitude subjective de l'universalité des propositions géométriques, voici la théorie du premier : quand un corps se meut, dit-il, ce qui change c'est le *lieu*. Comme différents lieux peuvent être occupés par le même corps sans que nous voyions qu'il en soit altéré, les lieux nous apparaissent *homogènes*, et l'ensemble des lieux homogènes est ce que nous nommons *espace*. D'où cette conséquence : ce qui est démontré vrai *ici*, est vrai *là*.

Mais cette conviction sur l'homogénéité de l'espace est empirique; proprement, le vrai *là* est tout subjectif; pour qu'il fût objectif, il faudrait que l'espace fût *là* de même nature qu'*ici*, et ce ne peut jamais être qu'une induction plus ou moins fondée, par exemple, sur ce qu'il nous semble que, même autour de Jupiter, les satellites se meuvent dans un espace homogène.

Quant à la certitude objective, les auteurs dont nous parlons en placent le fondement, les prémisses étant hypothétiquement admises, dans l'accord des conséquences entre elles, et avec les données de l'expérience quand la construction est possible.

Sur ce dernier point nous nous trouvons parfaitement de leur avis (1). Mais quant à la première partie de leur réponse, nous avons, en plusieurs endroits, montré l'erreur qui s'y trouve.

D'où est tiré ce principe, que quand les conséquences

(1) Seulement, il ne faut pas confondre ce qu'ils entendent par *expérience*, c'est-à-dire, la *vérification* au moyen de constructions réelles, avec notre expérience idéale à nous, c'est-à-dire, la combinaison arbitraire de certaines données. L'expérience idéale, en tant qu'elle découle des prémisses, est vraie et sûre; mais les constructions réelles peuvent seules donner une vérité objective aux lois idéales que je découvre.

sont d'accord entre elles, les prémisses sont vraies? La déduction rigoureuse d'un système ne prouve rien quant à la vérité des prémisses. L'astronomie de Ptolémée et celle de Tycho-Brahé, la géométrie imaginaire de Lobatschewsky, des parties entières de la physique mathématique, telles que la théorie du magnétisme d'Ampère, sont là pour infirmer la valeur absolue de ce critérium.

LIVRE II.

—

PRINCIPES PURS DE LA GÉOMÉTRIE.

En géométrie, comme dans toute science, il faut distinguer deux choses : le fond et la forme; les vérités et la manière dont elles sont enchaînées; le système et la méthode.

La forme se ramène à un nombre déterminé de principes logiques, ne donnant aucune connaissance réelle; le fond, à certaines vérités premières, objectives, point d'appui de la science. Les premiers sont les *axiomes* de la géométrie; les secondes, ses *postulats* ou *hypothèses*.

La géométrie, comme géométrie, n'a à s'occuper ni de sa méthode — c'est la tâche de la logique — ni de

ses prémisses — c'est la philosophie qui les lui donne. C'est pourquoi nous intitulons ce livre : *Principes purs de la géométrie*, entendant par là les principes, abstraction faite de tout contenu autre que l'objet général de la science. Nous le divisons en deux chapitres :

I. *Logique et méthodologie spéciales de la géométrie ;*

II. *Des hypothèses fondamentales, ou des postulats de la géométrie.*

CHAPITRE Ier.

LOGIQUE ET MÉTHODOLOGIE SPÉCIALES DE LA GÉOMÉTRIE.

Ce chapitre se divise en trois paragraphes : dans le premier, nous donnons les règles du raisonnement au point de vue spécial de la géométrie; dans le second, nous nous occupons de la systématisation de la science; le troisième enfin est consacré à la recherche d'un critérium formel de certitude.

§ 1. — DE LA FORME DES RAISONNEMENTS EN GÉOMÉTRIE.

Syllogisme par substitution.

Les lois du raisonnement géométrique sont, comme on sait, celles du syllogisme par substitution, que résume la proposition suivante :

Deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles.

Proposition synthétique, forme pure de la synthèse, car elle me permet d'ajouter à A l'attribut C, quand je lui connais l'attribut B et que je sais que B possède l'attribut C.

La plupart des axiomes d'Euclide ne sont que des cas particuliers de celui-là; ainsi, par exemple : *Quand de deux quantités égales on retranche des quantités*

égales, les restes sont égaux, et toutes les transformations logiques de cette proposition.

Cet axiome est, disons-nous, la forme pure du raisonnement géométrique; il ne peut donc servir à établir des vérités particulières, comme on a l'air de le croire généralement. Quand j'ai les deux équations A = B et B = C, ce n'est pas *en vertu de l'axiome* que j'en tire A = C, car l'axiome n'est pas en lui-même plus évident que le cas particulier auquel il s'applique. Carnéades qui nie que A = C, nie à plus forte raison l'axiome (1).

Des réciproques et des inverses

Les réciproques et les inverses ne sont que des applications particulières des règles de la conversion et de la contraposition des jugements (2). On les confond souvent les unes avec les autres et avec les démonstrations par l'absurde. Étant données une proposition et sa conséquence, la réciproque consiste à prouver que, la proposition n'existant pas, la conséquence n'existe pas; l'inverse, à prouver que, la conséquence existant, la proposition principale existe. Si je dis, par exemple : Quand le soleil donne sur la pierre, celle-ci s'échauffe ; la réciproque serait : Quand le soleil ne donne pas sur la pierre, celle-ci ne s'échauffe pas; et l'inverse : Quand une pierre s'échauffe, c'est que le soleil donne dessus.

(1) Bayle. *Dictionnaire historique* ; article Carnéades, C.

(2) Les théorèmes que nous allons exposer, se trouvent en partie dans un ouvrage de Hauber, publié en 1829 ; Drobisch les cite dans sa logique, sans les faire servir au même objet que nous, et sans leur donner la même extension.



Enfin, il y a encore la réciproque de l'inverse ou l'inverse de la réciproque, qui découle toujours logiquement de la première affirmation, et qui est : Quand une pierre ne s'échauffe pas, c'est que le soleil ne donne pas dessus.

Quant aux démonstrations par l'absurde, elles sont en général composées de trois membres disjonctifs, par exemple : A est égal à B, car il n'est ni plus grand ni plus petit que B. La réciproque consiste simplement à montrer que A n'est pas inégal à B. Mais qui ne voit que, dans ce cas. la réciproque n'est possible que par l'absurde? Quelques auteurs, emportés par un zèle inconsidéré, ont rejeté les démonstrations par l'absurde, sous prétexte qu'elles démontraient, non la vérité, mais la fausseté de l'erreur. Il n'est cependant pas raisonnable de vouloir priver l'esprit humain d'un de ses modes les plus puissants de démonstration.

Nous ne donnerons les théorèmes généraux que pour les inverses et les réciproques, laissant au lecteur le soin d'étendre cette théorie aux démonstrations par l'absurde.

Prémisses. On suppose que S ne puisse être que a ou b; et que S′ ne puisse être que a' ou b'.

I. Théorème. *Si, quand* $S = a$, *on a toujours* $S' = a'$, *et réciproquement, si, quand* $S = b$, *on a toujours* $S' = b'$;

Alors inversement, quand $S' = a'$, *on a toujours* $S = a$, *et réciproquement, quand* $S' = b'$, *on a toujours* $S = b$.

Démonstration. Car si, quand $S' = a'$, on avait $S = b$, l'hypothèse donnerait $S' = b'$ et non $S' = a'$. De même, si, quand $S' = b'$, on avait $S = a$, en vertu de l'hypothèse, on aurait $S' = a'$ et non $S' = b'$.

II. Théorème. *Si, quand* $S = a$, *on a toujours* $S' = a'$, *et inversement, si, quand* $S' = a'$, *on a toujours* $S = a$;

Alors réciproquement, quand $S = b$, *on a toujours* $S' = b'$, *et inversement, quand* $S' = b'$, *on a toujours* $S = b$.

Démonstration. Si, quand $S = b$, S' était égal, non à b', mais à a', dans ce cas, en vertu de l'hypothèse, S serait égal à a et non à b. De même, si quand $S' = b'$, S était égal à a et non à b, en vertu de l'hypothèse, S' serait égal à a' et non à b'.

III. Théorème. *Si, quand* $S' = a'$, *on a toujours* $S = a$, *et réciproquement, si, quand* $S' = b'$, *on a toujours* $S = b$;

Alors inversement, quand $S = a$, *on a toujours* $S' = a'$, *et réciproquement, quand* $S = b$, *on a toujours* $S' = b'$.

IV. Théorème. *Si, quand* $S = b$, *on a toujours* $S' = b'$, *et inversement, si, quand* $S' = b'$, *on a toujours* $S = b$;

Alors réciproquement, quand $S = a$, *on a toujours* $S' = a'$, *et inversement, quand* $S' = a'$, *on a toujours* $S = a$.

La démonstration de ces deux théorèmes est la même que celle des précédentes.

En résumé, la prémisse peut donner matière à quatre propositions :

1. Quand $S = a$, on a $S' = a'$; proposition que nous nommerons *principale*.

2. Quand $S = b$, on a $S' = b'$; *réciproque*.

3. Quand $S' = a'$, on a $S = a$; *inverse*.

4. Quand $S' = b'$ on a $S = b$; *inverse de la réciproque*, ou *réciproque de l'inverse*.

Ces quatre propositions sont vraies à la fois, si la première et la seconde le sont, ou bien, la troisième et la quatrième; ou bien, la première et la troisième, ou encore, la seconde et la quatrième.

Et pour ne plus y revenir, faisons remarquer que la réciproque de l'inverse ou la quatrième proposition, découle toujours logiquement de la proposition principale, de la première, sans qu'il y ait besoin de donner une démonstration; de même, la première découle de la quatrième, la troisième de la seconde, et la seconde de la troisième; en d'autres termes, les couples 1 et 4, 4 et 1, 2 et 3, 3 et 2, sont indivisibles; l'une des propositions de chacun de ces couples entraîne nécessairement l'autre.

Il suit de là que toute proposition donne en général lieu à quatre théorèmes, et que, l'un deux étant démontré, on a deux moyens d'en démontrer l'*inverse* ou la *réciproque*, et c'est de démontrer l'une ou l'autre indifféremment.

Appliquons ces principes à un exemple pris dans les triangles isocèles.

Prémisses. S est a ou b; traduction : les angles à la base sont égaux ou inégaux ; S' est a' ou b'; traduction : les côtés opposés à ces angles sont égaux ou inégaux.

De là quatre théorèmes à démontrer :

1. Quand les angles sont égaux, les côtés le sont.

2. Quand les angles sont inégaux, les côtés le sont aussi (réciproque).

3. Quand les côtés sont égaux, les angles le sont aussi (inverse).

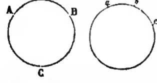
4. Quand les côtés sont inégaux, les angles le sont aussi.

On peut donc choisir indifféremment l'un des quatre couples, 1 et 2, 1 et 3, 3 et 4, 2 et 4; ils sont exactement sur le même rang, ont la même valeur, l'un n'est pas plus à rejeter que l'autre.

Du paradoxe géométrique

C'est ici le lieu de parler d'une difficulté logique qui n'a pas encore été signalée, que nous sachions, et dont la solution nous sera plus tard d'une grande importance, entre autres dans la théorie des figures semblables. Procédons par un exemple :

Le cercle est une figure que trois de ses points déterminent ; en d'autres termes : par trois points on ne peut faire passer qu'un cercle ; ou bien encore : étant donné un triangle, le cercle circonscrit est déterminé ; propriété qu'énonce le théorème suivant : *Quand les triangles sont égaux, les cercles circonscrits le sont aussi.* Nous savons que de cette proposition nous pouvons déduire logiquement la réciproque de l'inverse, à savoir : *Si les cercles sont inégaux, les triangles inscrits le sont nécessairement aussi.* Mais comment se fait-il que l'inverse et la réciproque soient fausses ; qu'il ne nous soit pas permis de dire : *Quand les cercles sont égaux, les triangles inscrits le sont ;* et, *quand les triangles sont inégaux, les cercles circonscrits le sont aussi*? C'est que l'on a affaire ici non à un cercle simple, mais à une figure composée d'un cercle et d'un triangle inscrit, ou encore à un cercle avec des points déterminés, ressortant sur sa circonférence. A ce titre on peut dire que les cercles A B C et *a b c*, en tant que cercles, sont égaux, sans qu'on en puisse dire autant des figures formées de ces mêmes cercles et de trois points disposés sur l'un autrement que sur l'autre.



§ 2. — DE LA MÉTHODE EN GÉOMÉTRIE.

La systématisation d'une science quelconque, botanique, zoologie, physique, géométrie, comprend trois opérations : la *description* ou *définition* des phénomènes dont elle s'occupe ; leur *classification* ou la *division* de l'objet général ; enfin, leur *enchaînement* ou leur *démonstration*. Si l'on réfléchit au rapport intime de ces trois opérations, on voit qu'en réalité elles n'en forment qu'une, que l'une d'elles bien faite entraîne les deux autres, qu'elle est toutes les trois à la fois. La description de l'objet, plante, animal, météore, ne sera complète et exacte que lorsque sa place, dans l'ensemble des autres êtres vivants ou des autres phénomènes naturels, sera précisée ; car on doit le comparer avec tous ceux-ci pour bien déterminer, bien saisir la valeur des caractères qu'on lui découvre, et même pour les découvrir ; et la classification elle-même, si elle est *naturelle*, si elle se base sur les caractères *essentiels*, non-seulement complète la *définition*, mais n'est même que la traduction de la loi qui préside à l'enchaînement des phénomènes, c'est la démonstration établie par le fait, et devenue un objet de l'intuition.

Telle serait la science dans son idéalité. Cette science idéale, type éternel de la science humaine, on peut en dessiner les contours, en dresser le plan, et elle servira de mesure pour juger du point où la nôtre est arrivée. Ce sont les conditions de la géométrie idéale que nous allons établir dans ce qui va suivre.

Première opération Description des objets, définition

La description prend en géométrie le nom de *définition* ; mais elle reste une véritable *description*

dans le sens étymologique. Pour nous donner une idée claire de la figure, elle doit nous la faire voir, ou nous donner les moyens de la tracer; elle doit être *génétique*. Remarquons toutefois, pour compléter et préciser ce que nous avons dit plus haut, qu'il ne suffit pas de la simple vue de la figure tracée, dessinée; car l'idée que nous nous en ferions d'après cette vue pourrait être fausse : une ellipse d'une faible excentricité ressemble très-bien à un cercle. Pour en saisir les caractères spécifiques, il faut savoir comment elle a été engendrée; et lorsque nous sommes en présence d'une figure naturelle, notre premier et unique souci, c'est, en général, d'en rechercher l'essence, le mode de génération, ou de la ramener à l'une de ces figures idéales qui nous sont connues parfaitement.

La définition ne doit être ni *négative*, ni *circulaire*, ni *surabondante*.

Nous entendons par définition *négative*, celle qui nous permettrait de distinguer l'objet défini, de ne pas le confondre avec d'autres, mais sans donner le moyen de nous le représenter. Telle est la définition ordinaire de la droite : *La ligne droite est le plus court chemin entre deux points*. En effet, si entre deux points on trace toutes les lignes imaginables, supposé même qu'il ne soit pas absolument impossible de parvenir à distinguer la plus courte, on ne saura pas davantage, deux points étant donnés, les joindre par une ligne droite.

Cette même définition est *circulaire* (1), mais ce défaut apparaît avec plus d'évidence dans la suivante : *La ligne droite est une ligne de direction constante*. Car pour distinguer, entre différentes lignes, celle de direc-

(1) Voir le livre suivant.

tion constante, il faut avoir déjà une direction constante, c'est-à-dire une droite : la définition implique le défini.

Comme exemple de définition *surabondante*, nous pouvons donner celle des triangles semblables : *Ce sont des triangles dont les angles sont égaux chacun à chacun et dont les côtés homologues sont en proportion.* On sait que deux triangles équiangles ont leurs côtés proportionnels et réciproquement ; et que cette dernière proposition fait même l'objet d'un théorème. Les définitions surabondantes exigent ainsi des théorèmes pour en relier les différentes parties (1).

Deuxième opération. Classification des figures (2).

Classifier les figures, c'est montrer comment les figures se suivent, comment elles s'engendrent l'une

(1) Nous nous trouvons ici en opposition avec la plupart des logiciens : « La définition suivante, dit M. Ueberweg (*Syst. de Log.*, page 132), pourrait être abondante : *Les parallèles sont des lignes droites de direction semblable et qui restent partout à égale distance l'une de l'autre.* Mais cette abondance n'est qu'apparente, si, dans la définition des triangles rectilignes semblables, on a compris l'égalité des angles ainsi que la proportionnalité des côtés. » Quand même cette dernière condition emporterait la justesse de la définition des parallèles, celle-ci n'en pécherait pas moins au point de vue esthétique, puisqu'elle ne devient claire que grâce à une explication antérieure ou subséquente.

Les définitions de la géométrie analytique satisfont toujours à ces règles : l'équation d'une figure fournit les moyens d'en construire tous les points.

(2) Nous développerons autre part l'analogie frappante qu'il y a entre notre classification des figures géométriques et les classifications réellement *naturelles* des autres sciences. Nous n'avons pas insisté sur ce point pour ne pas être forcé d'enclaver une théorie nouvelle du genre et de l'espèce, ainsi que de leurs caractères *essentiels*, dans un travail spécial sur la géométrie. D'ailleurs la classification que nous donnons ici est à peu près celle de la géométrie analytique.

l'autre, les ranger enfin d'après un principe, en espèces, genres, familles, etc. (1). Quel est ce principe? La réponse est uniforme dans toutes les sciences : il faut procéder du simple au composé. Mais, pour beaucoup d'entre elles, la difficulté est de reconnaître ce qui est simple et ce qui est composé.

La figure est donnée par son mode de génération. Elle est donc plus ou moins composée, suivant le plus ou moins grand nombre de ses éléments générateurs (2).

Appliquons ceci à la classification des lignes.

L'élément d'une ligne est l'ensemble de deux points consécutifs :

La ligne droite est déterminée par la position du premier élément. Le cercle ne le sera que par la position de l'élément suivant; en posant le troisième élément à l'égard du second, comme celui-ci l'est à l'égard du premier, on continuera à tracer le cercle. Mais la position de ce troisième élément étant différente, on commence le tracé de la parabole, et pour continuer à la décrire, il suffit de placer l'élément suivant par rap-

---

(1) Ici encore la géométrie analytique, mais pour les courbes algébriques seulement, nous fournit un admirable exemple de classification, et de génération de toutes les figures possibles; le degré de l'équation donne la famille; le genre résulte de certaines conditions, telles que le signe de B^2-4AC dans les équations du 2[d] degré; puis la variation des paramètres donne les espèces et les individus. Dans un ordre plus élevé, la classification de Monge, fondée sur les rayons de courbure, est un modèle de classification philosophique; et, pour le dire en passant, elle est basée exclusivement sur la forme et sur la différence de trois *mesures* pour apprécier les formes.

(2) Voir, à la fin du chapitre suivant, ce que nous disons sur les éléments.



port au second et au troisième, comme celui-ci l'est par rapport au premier et au second (1). Après la parabole viennent les lignes déterminées par quatre éléments : l'ellipse et l'hyperbole, et ainsi de suite. Telle est la classification des courbes élémentaires qui sont proprement du domaine de la géométrie synthétique. Nous ne nous occupons pas de la classification des courbes transcendantes, qui ne sont données que par un élément *fini*. Les courbes dans l'espace se classent d'après des principes analogues, ainsi que les surfaces.

Nous n'avons considéré jusqu'ici que les figures simples ou élémentaires ; il nous reste à classer les *figures composées*. Nous entendons par là, toute figure formée de deux autres. Nous disons *deux* autres et non *plusieurs* autres, parce que du moment où l'on sait composer deux figures, on en sait composer trois, quatre, etc. (2), une figure composée de trois figures,

(1) Il n'est pas toujours facile actuellement de trouver par la géométrie synthétique la loi qui a présidé à ces positions consécutives ; la géométrie analytique et le calcul différentiel jouissent, sous ce rapport, de plus de ressources ; mais qu'on n'oublie pas que nous construisons ici une géométrie idéale, que la géométrie humaine doit chercher à réaliser. La géométrie analytique elle-même n'est-elle pas déjà impuissante à l'égard des courbes du 5e, et même du 4e et du 3e degré, par suite de l'état imparfait de l'algèbre qui ne sait pas résoudre, en général, les équations d'un degré supérieur au 4e ? le calcul différentiel n'est-il pas entravé par les difficultés, jusqu'ici insurmontées, qu'offre le calcul intégral ?

(2) C'est ainsi que l'on doit dire : l'addition est une opération qui consiste à réunir *deux* (et non *plusieurs*) nombres en un seul. On ne réunit jamais *plusieurs* nombres à la fois en un seul ; on commence par en réunir deux ; puis la somme de ces deux-ci avec le troisième ; puis cette nouvelle somme avec le quatrième, et ainsi de suite.



pouvant être regardée comme composée d'une figure simple et d'une figure composée.

Cela établi, rien ne nous empêche plus d'employer les expressions de figures composées de trois, de quatre, de cinq figures simples.

Les lignes courbes étant infiniment plus compliquées que la ligne droite— ce qui se voit par la génération d'une ligne courbe quelconque, même du cercle, que l'on est porté naturellement à regarder comme un polygone d'un nombre infini de côtés — avant d'étudier les lignes courbes, on étudiera les figures composées de lignes droites; celles composées de deux droites, puis celles de trois, de quatre, etc., droites; puis on passera au cercle, aux figures composées du cercle et d'une droite; du cercle et de deux droites, etc., puis de deux cercles, de deux cercles et d'une droite, etc., puis de trois cercles, etc. Après cela viendrait l'étude de la parabole. etc. Il est inutile, pensons-nous, de continuer cette énumération.

Notre classification des figures est donc achevée, et d'après un principe clair et simple, qui a une grande analogie avec celui de la chimie inorganique dont nous avons parlé plus haut.

De ce qui précède il résulte que la place des figures est déterminée d'avance dans la géométrie idéale. Ainsi, il ne sera pas permis, à moins de s'écarter de cet idéal, d'étudier une figure avant une autre, si la classification en a décidé autrement. On le fait quelquefois par nécessité, par ignorance, mais on doit l'éviter.

Ce n'était pas l'opinion de Montucla :

« Le reproche de désordre fait à Euclide, dit-il, m'oblige à quelques réflexions sur l'ordre prétendu qu'affectent nos auteurs modernes d'éléments, et sur

les inconvénients qui en sont la suite. Peut-on regarder comme un véritable ordre, celui qui oblige à violer la condition la plus essentielle à un raisonnement géométrique, je veux dire, cette rigueur de démonstration, seule capable de forcer un esprit disposé à ne se rendre qu'à l'évidence métaphysique?........ Il y a même, à mon avis, une sorte de puérilité dans cette affectation de ne point parler d'un genre de grandeur, des triangles, par exemple, avant que d'avoir traité au long des lignes et des angles: car pour peu que, s'astreignant à cet ordre, on veuille observer la rigueur géométrique, il faut faire les mêmes frais de démonstration, que si l'on eût commencé par ce genre d'étendue plus composé, et d'ailleurs si simple, qu'il n'exige pas qu'on s'y élève par degrés. J'ose aller plus loin, et je ne crains point de dire que cet ordre affecté va à rétrécir l'esprit, et à l'accoutumer à une marche contraire à celle du génie des découvertes. C'est déduire laborieusement plusieurs vérités particulières, tandis qu'il n'était pas plus difficile d'embrasser tout d'un coup le tronc dont elles n'étaient que les branches. Que sont, en effet, la plupart de ces propositions sur les perpendiculaires et les obliques, qui remplissent plusieurs sections des ouvrages dont on parle, sinon autant de conséquences fort simples de la propriété du triangle isocèle? Il était bien plus lumineux et même plus court, de commencer à démontrer cette propriété, et d'en déduire ensuite toutes ces autres propositions. »

Montucla aurait raison s'il était démontré que la rigueur ne peut pas marcher de front avec l'ordre; or nous croyons avoir établi cette possibilité sur des principes philosophiques. On pourrait même se demander si les défauts de rigueur qu'on remarque dans Euclide,

comme dans les autres géomètres, ne proviennent pas de ce qu'ils n'ont pas suivi l'ordre véritable. Quant à appeler cet ordre une *puérilité*, c'est, à notre avis, une exagération, et nous n'en voulons d'autre preuve que les efforts de Legendre pour le conserver. Qu'on nous permette d'ailleurs d'opposer à ce passage de Montucla quelques lignes de la Logique de Port Royal, remarquables de critique et de bon sens :

» N'avoir aucun soin du vrai ordre de la nature, c'est le plus grand défaut des géomètres. Ils se sont imaginés qu'il n'y avait presqu'aucun ordre à garder, sinon que les premières propositions pussent servir à démontrer les suivantes. . . . .

» Il y a des géomètres qui croient avoir justifié ces défauts, en disant qu'ils ne se mettent pas en peine de cela; qu'il leur suffit de ne rien dire qu'ils ne prouvent d'une manière convaincante; et qu'ils sont par là assurés d'avoir trouvé la vérité, qui est leur unique but.

» On avoue aussi que ces défauts ne sont pas si considérables, qu'on ne soit obligé de reconnaître, que de toutes les sciences humaines il n'y en a point qui aient été mieux traitées, que celles qui sont comprises sous le nom général de mathématiques; mais on prétend seulement qu'on y pourrait encore ajouter quelque chose qui les rendrait plus parfaites, et que quoique la principale chose qu'ils aient dû y considérer, est de ne rien avancer que de véritable, il aurait été néanmoins à souhaiter qu'ils eussent eu plus d'attention à la manière la plus naturelle de faire entrer la vérité dans l'esprit...

» J'avoue qu'il faut préférer à toutes choses l'assurance de ne se point tromper, et qu'il faut négliger le vrai ordre si on ne le peut suivre sans perdre beaucoup de la force des démonstrations, et s'exposer à

l'erreur. Mais je ne demeure pas d'accord qu'il soit impossible d'observer l'un et l'autre, et je m'imagine qu'on pourrait faire des éléments de géométrie, où toutes choses seraient traitées dans leur ordre naturel, toutes les propositions prouvées par des voies très-simples et très-naturelles, et où tout néanmoins serait très-clairement démontré. »

Troisième opération. Démonstration.

COMMENT ARRIVE-T-ON A L'IDÉE D'UN THÉORÈME? QU'EST-CE QU'UN THÉORÈME?

Comment démontre-t-on un théorème ? Pourquoi Thalès s'est-il demandé quelle pouvait être la somme des trois angles d'un triangle? Comment surtout a-t-il obtenu cette somme, à savoir : deux droits? Car, pour le dire d'avance, obtenir cette somme, c'est déjà démontrer le théorème.

Figurons-nous Thalès devant son triangle : il se demande, quelles sont les conditions qui le déterminent, ou, ce qui revient au même, quand deux triangles sont égaux — question naturelle et inévitable, premier *pourquoi* de la science. Parmi les cas d'égalité de deux triangles, se trouve celui où l'on donne un côté et les deux angles adjacents. Thalès n'eut pas de peine à s'apercevoir qu'avec ces données, on ne peut former que le même triangle, c'est-à-dire que les deux autres côtés et le troisième angle se trouvent par là même tout déterminés. Le *problème* est donc posé de rechercher quel est ce troisième angle (1).

(1) Thalès aurait pu se demander aussi, et il est probable qu'il l'a fait, quels sont les deux autres côtés. Seulement la réponse, qui est en effet plus difficile, lui échappa.

Il est facile de le résoudre artificiellement par la construction du triangle; mais ce que la science demande, c'est un rapport, une loi générale, une relation de la chose cherchée aux quantités données. Ce problème, Thalès l'a résolu comme on résout tous les problèmes, un peu en tâtonnant; et on en connaît le résultat : c'est que le troisième est égal à l'excès de deux droits sur la somme des deux autres.

Prenons l'exemple du théorème de Pythagore; on peut le ramener de même à un problème : Dans un triangle rectangle, étant donnés deux côtés, à quoi est égal le troisième? car ce troisième est tout déterminé par les deux autres. Ce troisième côté, qui vient se poser de lui-même, de sa propre autorité, quand j'ai posé arbitrairement les deux autres, c'est un phénomène dont je recherche la loi; de même que je recherche la nature de la trajectoire d'une pierre que je lance dans l'espace, trajectoire qui se décrit fatalement en vertu du mouvement initial déterminé librement par la force et la direction du jet.

Nous croyons donc avoir établi cette vérité : C'est qu'avant le théorème existait le problème. De là découle cette autre vérité, qui n'est qu'une définition, mais remarquable par ses conséquences : *Le théorème est l'énoncé du résultat d'un problème.*

Problème. A quoi est égale la somme des trois angles d'un triangle? Réponse : à deux droits (1).

Théorème. La somme des trois angles d'un triangle est égale à deux droits.

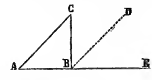
---

(1) Nous posons ainsi le problème pour la brièveté. L'énoncé uivant serait plus exact : à quoi est égal le troisième angle d'un triangle dont les deux autres sont donnés ? Réponse : à l'excès de deux droits sur la somme de ceux-ci.

On connaît la définition ordinaire du théorème : *c'est une vérité à démontrer, ou qui devient évidente au moyen d'un raisonnement appelé démonstration.* Cette définition, qui rentre d'ailleurs complétement dans la nôtre, place le théorème en opposition avec *l'axiome* qu'on définit *une vérité évidente par elle-même*, et le *problème* se trouve n'avoir aucun lien avec le théorème. Notre définition, au contraire, lie intimement, sous le rapport psychologique, comme sous le rapport géométrique, le théorème et le problème.

De plus, la définition ordinaire ne peut conduire à aucune règle ni pour les énoncés, ni pour la démonstration des théorèmes; de la nôtre, au contraire, ces règles découleront immédiatement, et n'en seront, pour ainsi dire, que des corollaires.

Comment établit-on l'exactitude du résultat d'un problème? En faisant la *preuve*, selon l'expression vulgaire; en faisant *l'expérience*, pour parler scientifiquement. Je veux démontrer que *la somme des trois angles d'un triangle est égale à deux droits.* Pour faire la preuve, je dois ajouter les trois angles l'un à l'autre : à côté de l'angle B, par exemple, je place le second C dans la position CBD, ou, si l'on veut, *je tire* BD *de manière que l'angle* CBD *soit égal à l'angle* ACB. — On sait, par un théorème précédent, que *cela se fait en menant* BD *parallèle à* AC. — Enfin, j'ajoute l'angle A, en faisant l'angle DBE égal à l'angle A. — Or, je vois encore, comme BD est parallèle à AC, qu'*il suffit de prolonger* AB. — J'ai maintenant mes trois angles bien placés ; je regarde plus ou moins attentivement selon le cas, et je vois que le théorème est vérifié.



On s'aperçoit, sans doute, que nous n'avons pas inventé la démonstration, ni même les phrases; nous n'avons fait que les disposer dans un autre ordre. La rédaction ordinaire serait, par exemple: *Sur le côté* AB *prolongé, et par le point* B, *menons une parallèle* BD *à* AC. *Les trois angles en* B *font deux droits; or l'un d'eux appartient déjà au triangle, et les deux autres*, etc. Combien seraient tentés de dire : Quelle heureuse idée de tirer cette parallèle! Dans la plupart des cas, l'heureuse idée, l'idée que l'on croit pouvoir attribuer au *hasard*, soulève chez le philosophe cette question : Comment a-t-on eu cette idée?

Nous voilà ramené, par un chemin nouveau, à la théorie que nous avons exposée dans le premier livre sur l'expérience mathématique. Seulement l'expérience, quand elle sert à la démonstration d'une vérité supposée connue, est une *vérification* (1), caractère qu'elle porte aussi dans les sciences dites *naturelles*, lorsque par elle on contrôle une loi donnée.

DE L'ANALYSE ET DE LA SYNTHÈSE EN MATHÉMATIQUES.

Comme on le voit, nous sommes ici sur le terrain de l'*analyse* et de la *synthèse* conçues dans le sens mathématique. Pour avoir une idée claire et nette des différents sens dans lesquels ces termes sont employés en mathématiques, nous ne pouvons mieux faire que d'emprunter à M. Chasles l'histoire remarquable qu'il en donne (2).

---

(1) Comparer un passage qui va suivre, tiré de M. Chasles.

(2) *Discours d'Inauguration au cours de Géométrie supérieure*, pages XXXIX et suiv.

Comparer aussi Renouvier, *Manuel de Philosophie ancienne*, liv. VII, § 2, II; et Annoot, *De la Méthode dans les sciences*, Revue trimestrielle, 1859.

« Ces deux mots, *synthèse* et *analyse*, avaient alors (dans l'antiquité), en mathématiques, un sens parfaitement défini. Mais, comme aujourd'hui nous les employons communément dans une acception spéciale très-différente, qui laisse ignorer aux jeunes géomètres ce qu'étaient les méthodes anciennes et surtout la méthode *analytique*, il ne paraîtra peut-être pas inutile de rappeler ici le sens précis que leur donne Pappus, le même qu'on trouve aussi dans Euclide (au treizième livre des *Éléments*).

» Dans la *synthèse* on part de vérités connues pour arriver, de conséquence en conséquence, à la proposition que l'on veut démontrer, ou à la solution du problème proposé.

» Par l'*analyse*, on regarde comme vraie la proposition que l'on veut démontrer, ou comme résolu le problème proposé, et l'on marche, de conséquence en conséquence, jusqu'à ce qu'on arrive à quelque vérité connue, qui autorise à conclure que la chose admise comme vraie l'est réellement, ou qui comporte la construction du problème ou son insolubilité.

» Ces deux manières de procéder en mathématiques ne répondent nullement à la signification actuelle des deux termes *analyse* et *synthèse*, dont le premier caractérise l'emploi du *calcul algébrique*, et le second la considération seule des propriétés des figures, au moyen du raisonnement naturel.

» Les deux méthodes anciennes ne différaient, au fond, que dans le point de départ, les diverses opérations du raisonnement étant les mêmes dans l'une et dans l'autre, mais dans un ordre inverse. On caractérisera brièvement ces deux méthodes, en appelant, avec Kant, la *synthèse*, *méthode progressive*, et l'*analyse*, *méthode régressive*.

» Il est essentiel de remarquer ici que l'usage de l'*analyse*, chez les Anciens, suppose nécessairement une proposition déjà connue et dont on cherche la démonstration, ou un problème proposé. De sorte que, hors ces deux cas, il n'y a point lieu, d'après la définition précise de Pappus, d'employer la méthode *analytique*.

» Il faut observer encore que, bien que l'esprit de la méthode soit le même dans les deux cas, néanmoins elle y a un caractère différent. Car, dans le premier, où il s'agit de démontrer une proposition, l'*analyse* n'est point autre chose qu'une méthode expérimentale de vérification à posteriori (1), tandis que dans le second, où il s'agit de résoudre un problème, elle forme une méthode d'invention à priori, puisqu'on se propose de trouver la solution ou construction du problème, ou de démontrer son impossibilité, ce qui constituera la découverte d'une vérité mathématique actuellement inconnue.

» C'est dans ce sens seulement qu'on peut dire que l'*analyse* des Anciens est la *méthode de recherche* ou d'*invention*.

» Hors ce cas de la solution d'un problème, l'*analyse* n'a point de vérité nouvelle à découvrir, et pour cet objet c'est la *synthèse* seule qui constitue la méthode d'invention par laquelle on forme et l'on accroît une science. »

Après quelques considérations sur les ouvrages des Anciens et leurs méthodes particulières, M. Chasles arrive aux temps modernes et à la découverte de l'algèbre :

---

(1) Voir ce que nous disons plus haut, page 104.

« Ce fut Viète qui créa cette science des symboles et apprit à les soumettre à toutes les opérations que l'on était accoutumé d'exécuter sur des nombres. C'est cette idée féconde qui a fait de l'algèbre un instrument universel des mathématiques. Viète avait appelé cette science, qu'il créait, *logistique spécieuse*, ou *calcul des symboles* (species), par opposition à la logistique *numérique*, et il la regardait comme l'introduction à l'*art analytique* des Anciens, c'est-à-dire à l'art de résoudre les problèmes, *nullum non problema solvere*. En effet, elle facilitait merveilleusement la mise en pratique de la *méthode analytique* de Platon, puisqu'elle permettait de faire indistinctement, sur les quantités connues et inconnues, les mêmes opérations arithmétiques, et d'introduire toutes ces quantités, au même titre, dans les équations et dans le raisonnement.

» Mais, par cette raison que cette *algèbre* ou *logistique spécieuse* devenait l'instrument propre à la marche *analytique*, les géomètres ont fini par l'appeler elle-même *analyse*. Voilà comment ce terme *analyse* a changé de sens, et signifie aujourd'hui l'emploi du *calcul algébrique*.

» Par une conséquence naturelle, et sans avoir égard à la distinction des deux méthodes observées par les Grecs, on a appelé exclusivement *synthèse* la géométrie cultivée à la manière des Anciens, parce qu'on y raisonne directement sur les propriétés des figures, sans faire usage des notations et des transformations algébriques.

» Cependant, le terme *analyse* s'emploie encore, en mathématiques, dans un autre sens, qui, tout en se rattachant, comme l'*Analyse de Viète*, à la signification primitive de ce mot, est précisément l'opposé de cette *analyse* moderne ou *logistique spécieuse*. Je veux parler

de l'acception commune, savoir que l'*analyse* est la *résolution* ou *décomposition* d'une chose en ses parties élémentaires et constitutives; opération qui implique un examen attentif de la chose considérée en elle-même et de toutes ses propriétés (1).

» Prise dans cette acception, l'*analyse unie à la synthèse*, forme la méthode de recherche et d'invention dans toutes les branches des connaissances humaines, en mathématiques comme dans les sciences physiques et philosophiques.

» Tel est le sens que M. Poinsot, dont les pensées sont toujours d'une justesse et d'une lucidité parfaite, attache au mot *analyse* en mathématiques. Après avoir dit que c'est improprement qu'on appelle *analyse* la méthode de pur calcul, ce célèbre géomètre ajoute : « La vraie *analyse* est dans l'examen attentif du pro- » blème à résoudre, et dans ces premiers raisonnements » qu'on fait pour le mettre en équations. Transformer » ensuite ces équations, c'est-à-dire, les combiner » ensemble, ou en poser d'autres évidentes que l'on

---

(1) C'est dans l'attention que l'on fait à ce qu'il y a de connu dans la question que l'on veut résoudre, que consiste principalement *l'analyse*, tout l'art étant de tirer de cet examen beaucoup de vérités qui nous puissent mener à la connaissance de ce que nous cherchons. (Arnauld, *Logique de Port-Royal*). (*Note de M. Chasles.*)

C'est aussi l'*analyse* telle que l'entendait Condillac.

Pascal (*Réflexions sur la géométrie en général*), après avoir dit que « on peut avoir trois principaux objets dans l'étude de la vérité : l'un de la découvrir quand on la cherche; l'autre, de la démontrer, quand on la possède; le dernier de la discerner avec le faux quand on l'examine, » (trois opérations, qui, en définitive, n'en font qu'une) ajoute : « La géométrie, qui excelle en ces trois genres, a expliqué l'art de découvrir des vérités inconnues; et c'est ce qu'elle appelle *analyse*. »

» combine avec elles, n'est au fond que de la *synthèse* ;
» à moins que l'idée de chaque transformation ne nous
» soit donnée par quelque vue de l'esprit, ou quelque
» nouveau raisonnement, ce qui nous fait rentrer dans
» la véritable *analyse*. Hors de cette voie lumineuse, il
» n'y a donc plus d'*analyse*, mais une obscure *synthèse*
» de formules algébriques que l'on *pose*, pour ainsi
» dire, l'une sur l'autre, et sans trop prévoir ce que
» pourra donner cette combinaison. Voilà les idées
» nettes qu'il faut attacher aux mots : et c'est au fond
» ce que tout le monde paraît sentir, puisqu'on dit très-
» bien une *heureuse* transformation, et qu'on ne dit
» point un *heureux* raisonnement ni une *heureuse*
» analyse (1). »

» Cette méthode *analytique* est celle que prescrit Descartes dans plusieurs passages de ses œuvres ; comme quand il dit : « *Il faut ramener graduellement*

---

(1) Voir *Théorie nouvelle de la rotation des corps*, page 121. On lit encore dans cet ouvrage si remarquable :

« Ce n'est donc pas dans le calcul que réside cet art qui nous fait
» découvrir ; mais dans cette considération attentive des choses, où
» l'esprit cherche avant tout à s'en faire une idée, en essayant, par
» l'analyse *proprement dite*, de les décomposer en d'autres plus
» simples, afin de les revoir ensuite comme si elles étaient formées
» par la réunion de ces choses simples dont il a une pleine connais-
» sance. Ce n'est pas que les choses soient composées de cette
» manière, mais c'est notre seule manière de les voir, de nous en
» faire une idée, et partant, de les connaître. Ainsi notre vraie mé-
» thode n'est que cet heureux mélange de l'*analyse* et de la *synthèse*,
» où le calcul n'est employé que comme un instrument. Instrument
» précieux et nécessaire sans doute, parce qu'il assure et facilite
» notre marche ; mais qui n'a par lui-même aucune vertu propre ;
» qui ne dirige point l'esprit, mais que l'esprit doit diriger comme
» tout autre instrument. » (Page 78.)

(Note de M. Chasles.)

les propositions embarrassées et obscures à de plus simples, et ensuite partir de l'intuition de ces dernières pour arriver, par les mêmes degrés, à la connaissance des autres (1). »

» Dans les ouvrages des Anciens, en général, les théorèmes sont parfaitement distincts, et l'énoncé de chacun précède sa démonstration, de sorte qu'il reste peu de traces de la marche d'invention que l'auteur a suivie dans la recherche et la découverte de ses propositions; les fils qui, primitivement, ont uni ces différentes propositions, dans leur ordre naturel de déduction, sont rompus. C'est ainsi que sont composés les ouvrages d'Euclide, d'Archimède, d'Apollonius, et, chez les Modernes, le grand ouvrage des *Principes* de Newton. Par cette raison, on a pensé parfois que ce mode d'exposition était plus conforme à l'esprit de la *méthode synthétique*, qu'il la constituait même; et l'on a conclu réciproquement, qu'un ouvrage où les propositions sont exposées suivant l'ordre des déductions rationnelles qui y ont conduit l'auteur, n'est pas *synthétique*, mais bien *analytique*.

» On peut dire que l'ouvrage est *analytique*, en donnant à ce mot sa signification commune; mais il est essentiellement *synthétique* aussi, puisque c'est par la combinaison de propositions déjà connues qu'on arrive successivement à des propositions nouvelles.

» L'équivoque qui peut résulter de ces acceptions diverses des termes *synthèse* et *analyse*, en mathématiques, cause souvent de l'embarras et de l'obscurité dans le langage. Il est à regretter que l'expression de

(1) *Règles pour la direction de l'esprit.* Règle cinquième.



logistique, employée si convenablement par Viète, et longtemps après lui, n'ait pas été conservée.

» Il n'est nullement besoin de dire qu'il ne faut pas confondre l'*analyse géométrique* des Anciens avec la *Géométrie analytique* des Modernes, la première est précisément ce que l'on appelle aujourd'hui *synthèse*, par opposition à la *Géométrie analytique*. »

Ces pages montrent à l'évidence le défaut de précision qui règne dans cette partie de la philosophie des mathématiques. Quand y a-t-il *analyse?* quand y a-t-il *synthèse?* Pourquoi la géométrie des anciens est-elle appelée *synthétique*, et celle de Descartes *analytique?* L'une n'emploie-t-elle que la *synthèse*, l'autre que l'*analyse?* Est-ce par l'*analyse* ou par la *synthèse* qu'on résout les problèmes et que l'on démontre les théorèmes? Il y a du vague et de l'indétermination dans la signification et l'emploi de ces termes, de même que dans la théorie psychologique. Nous allons essayer de les fixer, et, par notre distinction entre *analyse* et *synthèse* d'un côté, *méthode analytique* et *méthode synthétique* de l'autre, nous pourrons conserver en général les dénominations que l'on a données aux diverses méthodes en géométrie, tout en restant fidèle au sens de ces mots dans la philosophie Kantienne, et nous rapprochant, pour le fond, de la pensée de M. Poinsot.

Il y a *synthèse* chaque fois qu'on cherche une formule, une relation, une équation; chaque fois qu'on attribue une qualité à un sujet en qui on ne voyait pas d'abord cette qualité; chaque fois qu'on augmente la somme de ses connaissances.

Il y a *analyse*, sitôt que, cette vérité trouvée, possédée, on la démontre, c'est-à-dire qu'on fait voir ses

rapports avec d'autres vérités déjà connues, quand on augmente la certitude de ses connaissances.

Il y a *méthode synthétique* quand on opère comme si l'on cherchait une relation, que cette relation soit connue ou non.

La *méthode* est *analytique,* chaque fois qu'on opère comme pour la démonstration d'une vérité, c'est-à-dire expérimentalement, que ce soit une vérité connue ou inconnue.

Au fond, il n'y a pas de différence entre l'*analyse* et la *synthèse :* on ne possède une vérité, on n'a une somme de connaissances plus grande que si l'on est certain de la vérité de ces connaissances; l'acquisition de cette certitude même est une *synthèse.* Mais nous sommes ainsi faits que nous considérons tous nos procédés sous deux faces qui nous paraissent opposées et qui, en réalité, sont identiques. En général, si l'on creuse ce qui est au fond de l'*analyse* on y trouvera une *synthèse*, et réciproquement.

Enonçons d'abord les résultats fondamentaux de nos distinctions : *La solution d'un problème*, ayant pour résultat de nous faire acquérir une vérité de plus, est toujours une *synthèse;*

La *démonstration d'un théorème*, ne faisant qu'augmenter la certitude de ma connaissance, est une *analyse.*

Ainsi, il y aura *synthèse* quand, recherchant quelle est la somme des trois angles d'un triangle, je trouve qu'elle est de deux droits; il y aura *analyse*, lorsque possédant déjà ce résultat, j'essaie de le démontrer. Mais, d'un côté, la position du *problème*, impliquant la connaissance de cette vérité-ci, à savoir, qu'il y a une vérité à trouver, est une *synthèse,* comme c'est une

synthèse aussi que de soupçonner, quand le *théorème* est posé, qu'il y en a une démonstration possible ; et d'un autre côté, le *problème* étant au fond l'énoncé d'une difficulté qu'on a ramenée à son expression la plus simple et la plus *claire*, est le produit d'une *analyse*, au même titre que l'énoncé du théorème. En d'autres termes, en tant que je considère l'énoncé du problème ou du théorème comme *le résultat d'un problème antérieur*, cet énoncé est une *synthèse* ; en tant, au contraire, que je le considère comme étant la dernière expression, la *transformation la plus claire d'une proposition antérieure*, c'est une *analyse.*

Jusqu'ici, comme on le voit, nous restons fidèle au sens que nous avons attribué à ces termes ; nous avons montré régressivement comment la *synthèse* était toujours le résultat d'une *analyse* antérieure, et *l'analyse* le résultat d'une *synthèse* précédente. Nous arrivons maintenant à notre distinction entre *méthode analytique* et *méthode synthétique* et c'est ici que nous allons nous rencontrer complétement avec l'illustre géomètre dont M. Chasles citait les paroles.

Quelquefois, pour la solution d'un problème ou la démonstration d'un théorème, on procède par tâtonnement, on essaie d'un moyen, puis d'un autre, jusqu'à ce qu'on en rencontre un qui conduise au but. C'est ce qui a lieu, la plupart du temps, pour les problèmes d'arithmétique, de géométrie synthétique (1). D'un côté, on combine diversement les données ; de l'autre,

---

(1) Telles sont à peu près les méthodes diverses pour déterminer les racines réelles d'une équation d'un degré supérieur, ou pour déterminer l'orbite parabolique des comètes.



on fait différentes constructions; et dès qu'on a atteint le but, on se montre satisfait. Or, en tant que cette *méthode* est employée dans sa pureté (et elle ne l'est jamais), nous la nommons *synthétique*; quelquefois, au contraire, pour la démonstration d'un théorème et pour la solution d'un problème, on se contente de traduire en construction ou en calcul, sur le résultat connu ou supposé connu, le problème ou le théorème. En tant que cette *méthode* donne immédiatement l'évidence ou la vérité inconnue, nous la nommons *analytique*. De là, deux conclusions générales :

Dans les géométries ordinaires (celles d'Euclide et de Legendre), on a employé principalement la *méthode synthétique*. En algèbre, et en géométrie analytique, on emploie plus souvent la *méthode analytique*.

Mais en tant que, dans la *méthode synthétique*, je prévois les conséquences d'une construction ou d'une certaine combinaison des données, il y a *méthode analytique*; comme d'un autre côté, dans la *méthode analytique*, en tant que je tâtonne, que j'essaie différents moyens de mettre le problème en équations, j'emploie la *méthode synthétique*. En d'autres termes, si les moyens choisis l'ont été avec conscience du but à atteindre et de leur puissance pour nous conduire à à ce but, il y a *méthode analytique*; si, au contraire, leur choix est de pur hasard ou de pur instinct, il y a *méthode synthétique*.

Appliquons cette distinction toujours au même exemple :

Problème : A quoi est égale la somme des trois angles d'un triangle?

Théorème : La somme des trois angles d'un triangle est égale à deux droits.

Si, pour la solution de l'un et la démonstration de l'autre, j'emploie la méthode de vérification, la méthode qui remonte du but à atteindre, c'est-à-dire la somme des trois angles du triangle, à une vérité connue, à savoir : Que les angles autour d'un même point d'une droite et du même côté de celle-ci font deux droits; si, en un mot, je place les trois angles à côté l'un de l'autre, et que je trouve le résultat cherché (problème) ou que je voie la vérité énoncée (théorème), ma *méthode* aura été *analytique*.

Que j'essaie au contraire, différentes constructions, que je tire, par exemple, une parallèle à l'un des côtés, ou que je calcule la somme des angles extérieurs, et cela sans me rendre compte de l'efficacité de ces moyens (ce qui, en réalité, n'a jamais lieu), j'use de la *méthode synthétique* dans la solution du problème, comme dans la démonstration du théorème.

Mais ici nous devons faire une remarque analogue à celle que nous avons faite à propos de l'*analyse* et de la *synthèse ;* c'est qu'aucune de ces deux méthodes ne s'emploie à l'exclusion de l'autre, et qu'à chaque pas de nos raisonnements, elles se mêlent et s'entrecroisent.

Il est bon, croyons-nous, que nous appliquions ces distinctions à un exemple pris dans une autre branche des mathématiques.

Problème. J'ai des noix dans l'une et l'autre poche; dans la première, j'en ai deux fois autant que dans la seconde; mais si j'en ôte une de celle-là pour la mettre dans celle-ci, il y en aura autant des deux parts. — Je veux ici obtenir une vérité, une formule, une équation, à savoir : *le nombre des noix dans une poche est quatre, et dans l'autre, deux.* J'augmente la somme de mes connaissances, j'opère une *synthèse.*

Mais je possède cette vérité, et je la vérifie : je vois qu'en effet, 4 est le double de 2, et que si j'ôte 1 à 4 pour l'ajouter à 2, les deux résultats sont égaux. Ma connaissance est donc certaine ; je possède une connaissance vraie ; j'ai opéré une *analyse* ; j'ai rattaché cette vérité à d'autres vérités déjà connues, et qui sont : que 2 est la moitié de 4 ; que $2 + 1 = 3$; que $4 - 1 = 3$ et que $3 = 3$; je l'ai envisagée comme impliquée dans ces dernières, et je l'en fais sortir.

Supposons maintenant que vous vouliez résoudre le problème. J'ai dit : si vous opérez comme si vous aviez la vérité, comme si vous vouliez la vérifier, vous employez la méthode *analytique* ; c'est le procédé algébrique : soit x les noix de l'une des poches ; l'autre en a le double $2x$; ajoutez 1 à x et ôtez 1 de $2x$, vous avez d'une part $x + 1$, et de l'autre $2x - 1$, et les deux résultats sont égaux : de là l'équation $x + 1 = 2x - 1$; d'où je tire : $x = 2$; et $2x = 4$. Cette méthode m'a conduit à la connaissance de ces deux dernières vérités ; elle est d'invention aussi, comme M. Chasles le soutient avec raison, si ce n'est qu'au lieu du terme de *méthode analytique*, il emploie celui d'*analyse.*

Mais essayez de résoudre le problème par l'arithmétique : dès l'abord, vous vous trouvez embarrassé, vous ne savez comment vous y prendre, vous êtes tenté d'essayer différents nombres pour voir s'ils ne satisfont pas à la question ; vous tâtonnez, en un mot ; c'est le propre de la méthode *synthétique*. Ainsi, vous remarquez que, puisqu'il y a autant de noix après qu'on en a ôté 1 de la première poche pour la mettre dans la seconde, il y en avait 2 de plus dans celle-là que dans celle-ci ; et comme il y avait le double, il faut que ce même nombre 2 serve à com-

pléter le double; j'en avais donc 2 dans une poche et 4 dans l'autre.

Or, quelle opération de l'esprit a présidé à la découverte de ce procédé? Vous avez examiné la question; vous vous êtes rendu compte du but que vous vouliez atteindre, et des moyens qui étaient à votre disposition, et vous n'avez pas combiné ces moyens sans une certaine conscience du point où ils devaient vous conduire; vous avez en réalité fait une analyse plus ou moins obscure, plus ou moins instinctive; d'autant plus instinctive que vous êtes moins homme, moins exercé, plus enfant. L'enfant — et c'est une remarque qu'on peut faire tous les jours — combine les nombres, les données du problème à tout hasard; il additionne, il soustrait, il multiplie, il divise, voit si le résultat obtenu est satisfaisant, et, ce dernier point obtenu, il est content; il emploie la méthode ***synthétique*** dans sa pureté presque entière. L'élève plus avancé, au contraire, la fait précéder d'une première analyse.

En algèbre, la mise en équation elle-même est précédée d'une synthèse, d'un tâtonnement, pour fixer la véritable inconnue, ou l'inconnue la plus favorable; l'exemple choisi est trop simple pour que ce phénomène psychologique s'y fasse jour; mais nous en appelerons à la mémoire d'écolier de ceux qui nous liront, et nous leur demanderons, s'ils arrivaient d'emblée à la mise en équation du problème, s'il n'y avait pas une espèce d'hésitation qui précédât l'emploi rigoureux de la méthode analytique (1).

(1) Nous pouvons dire la même chose de ce qui se fait en géométrie analytique, et retrouver dans les procédés qu'on y emploie, dont la forme générale est pourtant analytique, toutes les nuances que nous venons de signaler. Ainsi, quand je cherche l'équation de

RÈGLES ESTHÉTIQUES POUR L'ÉNONCÉ DES THÉORÈMES.

Les règles que nous allons déduire découlent des principes trouvés précédemment ; elles ne sont pas absolues, mais subordonnées au goût et aux convenances, ainsi qu'au but qu'on a en vue. C'est pourquoi nous les avons nommées *esthétiques*.

Première règle : de l'élégance. — Nous procéderons par exemples, l'esprit les saisissant mieux qu'un précepte général.

Théorème. L'angle dont le sommet est en dehors de la circonférence a pour mesure la demi-différence des arcs compris entre ses côtés.

Au premier abord on ne voit pas bien le moyen de démontrer expérimentalement ce théorème. Mais qu'on l'énonce de la manière suivante :

L'angle dont le sommet est en dehors de la circonférence est égal à la différence des angles qui auraient

---

la tangente, ou celle des asymptotes d'une courbe, j'opère une *synthèse*; je résous le *problème* suivant : *par un point mener une tangente à une courbe donnée.*

Si je pars de l'équation de la tangente ou de l'asymptote, et que je démontre que cette équation représente une tangente ou une asymptote ; si je démontre, par exemple, que : $y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x')$, est l'équation de la tangente à une courbe au point x', y' ; ce qui est proprement un *théorème*, je fais une *analyse*.

Mais, si je le démontre expérimentalement, par vérification, en admettant la formule comme vraie, et non en partant des propriétés de la tangente, j'emploie la *méthode analytique*.

Si, au contraire, je dis : l'équation cherchée de la tangente aura cette forme : $y - y' = a\,(x - x')$, et que je détermine ce coefficient a, que je trouverai être égal à $\frac{dy'}{dx'}$, j'aurai employé la *méthode synthétique*.

leurs sommets sur la circonférence, et dont les côtés passeraient par les extrémités des arcs interceptés.

Alors, la preuve est facile, en tirant une diagonale entre les points d'intersection des côtés avec la circonférence.

De là cette règle : *L'énoncé des théorèmes doit, autant que possible, amener la preuve expérimentale.* A ce point de vue, le second énoncé est préférable au premier. Le suivant est encore plus simple :

L'angle extérieur à la circonférence est égal à l'angle qui a son sommet sur la circonférence, et qui comprend entre ses côtés la différence des arcs interceptés par les côtés du premier — énoncé qui conduit à la construction d'une parallèle à l'un des côtés.

Et quel est au fond le sens de nos corrections? Nous avons supprimé un saltus dans les énoncés des théorèmes. En effet, dans la théorie, on passe des angles au centre, aux angles à la circonférence, puis aux angles en dehors de celle-ci, soit intérieurs, soit extérieurs ; les premiers servent de types ; on ramène les seconds aux premiers ; il faut ramener les troisièmes aux seconds, et dans le corollaire seulement les ramener aux premiers : *l'angle à la circonférence* est égal à la moitié de *l'angle au centre* qui intercepte le même arc ; *l'angle en dehors de la circonférence* est égal à la somme ou à la différence des *angles à la circonférence* qui interceptent les mêmes arcs ; donc, comme corollaire, les *angles en dehors de la circonférence* ont pour mesure la moitié de la somme ou de la différence des *angles au centre* mesurés par les arcs interceptés.

Mais l'emploi de cette règle n'est pas toujours possible, comme le prouve la proposition suivante :

Théorème. Dans un cercle, les cordes se coupent en parties inversement proportionnelles.

Ici la preuve directement expérimentale ne serait applicable que si l'on mettait l'énoncé sous cette forme :

Quand deux cordes se coupent dans un cercle, si l'on joint les extrémités opposées des cordes, on forme deux triangles semblables où les côtés homologues sont les deux segments de la même corde — puis viendrait comme corollaire le théorème ordinaire.

Cet énoncé comble le saltus ; mais il est de beaucoup inférieur au précédent en concision, en clarté, en *élégance*, suivant l'expression consacrée ; de plus, la proposition importante, la seule utile, est mise en corollaire, défaut que l'on doit éviter. On obvierait en partie à cet inconvénient par un corollaire tel que le suivant placé en ordre utile : Quand il est nécessaire d'établir l'existence d'une proportion entre lignes droites, il suffit d'établir la possibilité de construire des triangles semblables avec ces lignes ; et inversement (1).

Deuxième règle : des lignes auxiliaires. — Comme les figures se suivent dans un ordre déterminé, il ne peut être permis de faire usage pour la démonstration

---

(1) Nous pourrions encore critiquer d'autres énoncés incomplets, et qui par cela même ne laissent pas deviner les moyens de démonstration. Le théorème de Pythagore est dans ce cas ; et pourtant il serait bon, dans l'énoncé même, d'appeler l'attention sur toute la portée de ce théorème, dont la seconde partie est presque aussi belle que la première. Voici cet énoncé complet :

Dans tout triangle rectangle, le carré construit sur l'hypoténuse, est égal à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés ; de plus, la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse, étant prolongée, divise le premier carré en deux rectangles respectivement équivalents aux carrés construits sur les côtés de l'angle droit.

d'un théorème sur une figure donnée, que des figures qui précèdent : une proposition sur la droite ne doit pas se démontrer au moyen des polygones; pas plus qu'une propriété des triangles au moyen du cercle; ou une proposition sur les parallèles au moyen des triangles. La plupart des géométries, ainsi que le travail de M. Ueberweg, tombent sous cette critique. Par la même raison, on doit éviter les lignes auxiliaires; en effet, tracer des lignes auxiliaires dans une figure, c'est employer à la démonstration une figure plus compliquée, et par conséquent postérieure. Elles ne sont permises, au point de vue esthétique, que si elles servent à mettre en évidence les données comprises dans l'énoncé du problème ou du théorème, comme dans la démonstration des trois angles du triangle (1). Nous reviendrons, du reste, sur ces points, quand nous parlerons des procédés généraux de la démonstration.

Troisième règle: de la longueur des démonstrations.— La démonstration doit être courte, et consister, autant que possible, dans la construction seule du théorème. « De grandes difficultés ou de grandes complications dans la solution d'une question, dit M. Brasseur (2), sont, presque toujours, la preuve que cette question n'est pas du domaine de la science par laquelle on a cherché à la résoudre; » et l'on pourrait ajouter : que cette preuve ne dépend pas des principes auxquels on veut la rattacher. C'est un reproche que la logique de Port-Royal fait aux géomètres *d'avoir plus de soin*

(1) Nous en donnons, au livre III, une démonstration sans le secours de lignes auxiliaires.

(2) *Mémoire sur une nouvelle méthode d'application de la Géométrie descriptive à la recherche des propriétés de l'étendue.* Extrait du tome XXIX des Mémoires de l'Académie royale de Belgique.

de la certitude que de l'évidence, et de convaincre l'esprit que de l'éclairer, ainsi que *de tirer leurs démonstrations par des voies trop éloignées* : « Ils ne se mettent pas en peine d'où les preuves qu'ils apportent soient prises, pourvu qu'elles soient convaincantes. Et cependant ce n'est que prouver les choses très-imparfaitement, que de les prouver par des voies étrangères, d'où elles ne dépendent point selon leur nature. »

On peut dire, en général, qu'il y a toujours possibilité, sinon actuelle, du moins absolue, de donner de ces démonstrations intuitives : c'est en cela que consiste le progrès de la science. Si les méthodes ne se simplifiaient pas de manière à permettre de voir d'un seul coup-d'œil un vaste ensemble de faits, l'esprit humain ne suffirait bientôt plus à la connaissance des faits acquis, et il cesserait d'avancer. C'est, du reste, ce que prouve à l'évidence l'histoire même de la géométrie. Si l'on ne possédait que les méthodes anciennes pour établir ces théorèmes de la géométrie supérieure dont Desargues et Pascal furent les premiers inventeurs, que d'études pour en découvrir ou en démontrer un petit nombre ! Les ouvrages de MM. Steiner, Chasles, Plücker, ont singulièrement simplifié cette tâche, et en dernier lieu, M. Brasseur a rendu à la géométrie supérieure un service signalé, en montrant, par la géométrie descriptive, l'essence de ces propriétés si remarquables, essence dont le rapport anharmonique n'est que la traduction sèche et morte.

Nous rappelons encore une fois que c'est un idéal que nous construisons ici, un type qui serve à juger des géométries passées, présentes et futures. Nous ne prétendons donc pas être nous-même à l'abri de ces critiques. Linné ayant ébauché le tableau d'un

ordre naturel des plantes, avait dressé la liste des genres qu'il ne pouvait classer : Celui qui rangera ces genres d'un siége incertain à leur véritable place, écrivait-il, celui-là sera pour moi un grand Apollon. Tous les savants devraient prendre Linné pour modèle.

§ 3. — CRITÉRIUM DE LA VÉRITÉ ABSOLUE D'UN THÉORÈME.

« On voit immédiatement, dit M. Lamarle (1) en parlant de la ligne équidistante d'une droite, que cette ligne est symétrique par rapport à toute perpendiculaire élevée sur la dernière ; qu'elle a, comme la droite, la propriété de glisser sur elle-même sans sortir du lieu qu'elle occupe; que deux parties quelconques égales en longueur, sont superposables, etc. » Pourquoi M. Lamarle, qui voulait arriver à établir que cette ligne est une droite, ne tirait-il pas cette conclusion de ce qu'elle jouissait des propriétés de la droite? C'est qu'il n'avait pas été prouvé que ces propriétés appartinssent exclusivement à la droite; et, en effet, les propriétés citées lui sont communes avec la circonférence. Pour qu'une propriété caractérise une figure, il faut que l'inverse des théorèmes soit vrai.

Toute définition génétique est inversible. Aussi quand je décris une figure en donnant son mode de génération B, et que j'appelle cette figure A, j'ai aussi bien le droit de dire, B *est* A, que A *est* B; aussi bien : *le cercle est une ligne dont tous les points sont à égale distance d'un point fixe*, que : *une ligne dont tous les points sont à égale distance d'un point fixe est un cercle* — *cercle* n'est qu'un nom donné à une chose. Mais le

(1) *Démonstration du postulatum d'Euclide*, Bulletins de l'Académie royale de Belgique, 1856.

cercle étant connu, étant, non plus un nom, mais une chose, je ne puis plus dire en définition : *le cercle est une figure où les cordes se coupent en parties inversement proportionnelles*; le sujet de cette proposition n'est plus un nom conventionnel, c'est une notion à moi bien connue. Pour avoir ce droit, je devrai commencer par démontrer qu'il n'y a que le *cercle* où les cordes se coupent en parties inversement proportionnelles; ma nouvelle définition du *cercle* a besoin d'être démontrée.

Toute figure est donc susceptible d'une infinité de définitions, qui sont tous les énoncés des *théorèmes inversibles* qui portent sur cette figure. Par conséquent, *tous les théorèmes que l'on peut énoncer sur une figure, sont autant de modes de génération de cette figure.* Si le théorème n'est pas inversible, il porte, non sur la figure qui en fait le sujet, mais sur une figure plus générale. C'est ainsi que je puis dire :

Un triangle est *rectangle* quand le carré d'un des côtés est égal à la somme des carrés des deux autres; quand le cercle circonscrit a pour diamètre l'un des côtés ; quand la droite qui joint l'un des sommets au milieu du côté opposé est égale à la moitié de ce côté; quand l'une des hauteurs divise le triangle en deux triangles semblables au grand; quand les carrés des côtés sont proportionnels aux segments adjacents, etc., etc. Ce sont là autant de définitions du triangle *rectangle.* — Mais pour avoir démontré que les angles extérieurs d'un triangle font quatre droits, je n'ai pas le droit de conclure que toute figure où les angles extérieurs font quatre droits, est un triangle; car cette propriété appartient à tout polygone plan rectiligne.

De même, le *cercle* est une figure où la tangente est perpendiculaire au rayon qui passe par le point de

contact; où la corde est divisée en deux parties égales par le rayon perpendiculaire; où les arcs sont proportionnels aux angles au centre, etc., etc. — Mais dirai-je que le cercle est une figure qu'une droite passant par un certain point peut toujours diviser en deux parties égales? Non, car cette propriété appartient aussi à tout polygone régulier d'un nombre pair de côtés.

Nous avons ainsi trouvé une réponse à ces deux questions : *Quel est le but de tout problème? Que démontre un théorème?* M. Comte avait déjà fait remarquer de quelle importance il était de trouver d'autres modes de génération des figures : par ce qui précède, nous établissons que la géométrie n'a pas d'autre but, d'autre résultat.

Ce paragraphe acquerra une plus grande importance quand nous montrerons que c'est pour ne pas avoir fait attention à la différence qu'il y a entre la définition, qui est toujours inversible, et le théorème, qui n'est inversible qu'après une démonstration, qu'on a eu besoin d'admettre implicitement ou explicitement comme évidents, sous le nom de *postulats*, un grand nombre de théorèmes.

CHAPITRE II.

DES HYPOTHÈSES FONDAMENTALES OU DES POSTULATS DE LA GÉOMÉTRIE.

Pour raisonner, il faut des prémisses; et l'idée de la science emporte que ces prémisses soient regardées comme vraies. Pour qui poserait en principe l'immobilité des choses, il ne peut y avoir de science du changement, à moins de se mettre, comme Parménide, en contradiction avec soi-même. Refusez à Euclide que par un point on puisse mener une parallèle à une droite, et qu'on n'en puisse mener qu'une, il est paralysé; niez les formules fondamentales de Lobatschewsky, et sa géométrie imaginaire croule à l'instant. C'est ce que Mill semble dire quelque part : « on admet que deux lignes droites ne peuvent enfermer un espace.... qu'il y a des choses comme des angles.... comme des cercles.... comme des ellipses.... » Pour Kant, ces prémisses — qu'il nomme *axiomes* — sont les conditions de l'intuition sensible à priori ; pour M. Ueberweg, ce sont quelques faits de l'expérience externe, qu'il cherche à connaître dans leur essence. Mais Euclide, Mill, Kant, ni M. Ueberweg n'ont déduit rationnellement ces prémisses; et de là, le vague qui s'attache à ces mots *axiome* et *postulat*, et la difficulté de distinguer les principes qui portent ces noms.

Nous l'avons dit en commençant ce livre, les *postulats* ou *hypothèses* de la géométrie, sont les vérités premières, regardées comme objectives, sur lesquelles s'édifie la science. Quelles sont ces vérités? Ce sont les *qualités fondamentales de l'objet de cette science, les faits simples qu'il implique*. L'arithmétique admet les idées et les propriétés de l'unité et de la pluralité ; la mécanique celles du mouvement, de la force, de la masse; la géométrie, celles de l'espace, de la forme et de la grandeur.

Mais ne demandez pas à l'arithmétique d'où naissent les idées d'unité et de pluralité, ce que c'est que l'unité pure ou la pluralité pure ; si ces idées peuvent ou ne peuvent pas subsister seules ; si elles ne renferment pas une contradiction intime ; sur tous ces points, l'arithmétique n'a pas à vous répondre. Ne demandez pas à la mécanique de vous dire ce que c'est que le mouvement, et de résoudre les arguments apportés par Zénon, d'Achille et de la tortue, de la flèche, de la règle, de la division à l'infini de l'espace ; ce n'est pas là son objet : il lui est interdit de se défendre elle-même sans cesser d'être mécanique. Ne demandez pas à la géométrie d'établir que toute figure a une grandeur et une forme, que l'espace a trois dimensions; elle empièterait sur un terrain qui ne lui appartient pas. « En tant que la géométrie, dit Hegel (1), n'est pas une science philosophique, et qu'elle accepte comme son objet l'espace avec ses déterminations générales, on ne doit pas exiger d'elle qu'elle démontre la nécessité des trois dimensions. » (2).

---

(1) *Philosophie de la Nature*. Mécanique, espace.

(2) « On trouvera peut-être étrange, disait Pascal (*Réflexions sur la géométrie en général*), que la géométrie ne puisse dé-

La géométrie a pour objet les *déterminations de l'espace*. Nous avons donc à analyser avec soin ce qui est contenu dans la notion de *détermination* et dans la notion d'*espace*; et les résultats de notre analyse seront les prémisses que nous cherchons. De là un premier paragraphe où nous parlons des qualités générales de la figure, la *grandeur* et la *forme*. Puis, comme l'espace donne lieu a deux séries de propriétés, les unes, purement *arithmétiques*, appartenant à l'espace considéré comme grandeur, les autres purement *géométriques*, appartenant à l'espace, en temps qu'il est le support des figures, nous les étudierons dans les deux paragraphes suivants; enfin, un quatrième paragraphe sera consacré à la discussion des notions d'*infini*, de *point* et d'*éléments* en géométrie.

§ Ier. — LA FIGURE : GRANDEUR ET FORME.

La notion *scientifique* de l'espace est, comme nous l'avons vu, celle d'un réceptacle *homogène*; c'est-à-dire dont les parties, quelles qu'elles soient, jouissent des mêmes propriétés. C'est là le sens qu'on attache, en général, au mot *homogénéité*; en chimie, en physique, nous disons qu'un corps est *homogène*, quand toutes ses parties ne diffèrent que par la *quantité*;

---

finir aucune des choses qu'elle a pour principaux objets. Car elle ne peut définir ni le mouvement, ni les nombres, ni l'espace; et cependant ces trois choses sont celles qu'elle considère particulièrement, et selon la recherche desquelles elle prend ces trois différents noms de *mécanique*, d'*arithmétique*, de *géométrie*, ce dernier nom appartenant au genre et à l'espèce. » Et ailleurs : « Cette judicieuse science (la géométrie) est bien éloignée de définir ces mots primitifs, *espace*, *temps*, *mouvement*, *égalité*, *majorité*, *diminution*, *tout*, et les autres que le monde entend de soi-même. »

quand, si l'on peut s'exprimer ainsi, la *partie* est l'image en petit du *tout* (bien entendu sous le point de vue tout particulier où l'on se place, le chimiste au point de vue de la qualité, le physicien, de la densité, par exemple). L'homogénéité de l'espace est une propriété double, en ce sens qu'une portion déterminée de l'espace peut être prise *partout* dans l'espace, et en ce que les propriétés générales de cette portion sont *indépendantes de sa grandeur* — tout comme les propriétés générales du fer appartiennent à chacune de ses parties. Ainsi, dans un grand comme dans un petit espace, il y a le même nombre de déterminations possibles; on peut tirer autant de lignes dans un petit cercle que dans un grand cercle; et tracer sur un carré de papier grand comme l'ongle, autant de figures que sur le sable d'une place publique. Dire que l'espace est homogène, revient, au fond, à dire que rien n'a une grandeur absolue.

De là suit que toute détermination de l'espace, que toute *figure* jouit de deux ordres de propriétés : les unes, indépendantes de sa *grandeur*, appartiennent en propre à sa *forme*, et constituent même l'essence de celle-ci; les autres ne dépendent que de sa *grandeur*, et lui appartiennent en commun avec toute quantité. On peut donc changer la grandeur sans changer la forme, et la forme sans changer la grandeur. La grandeur jointe à la forme, c'est la *position* ou le *lieu* de la figure; c'est la figure même. Changez la grandeur ou changez la forme; le lieu, la position de la figure est changée; vous avez une autre figure.

L'indépendance réciproque de la forme et de la grandeur, tel est *le premier postulat* de la géométrie. Nous avons établi *philosophiquement*, en nous basant sur l'homogénéité de l'espace, la nécessité pour notre esprit de

concevoir et d'admettre cette indépendance. On nous objectera peut-être que nous n'en avons pas donné la démonstration *géométrique;* on nous demandera d'expliquer comment on peut changer la grandeur sans changer la forme; ce qui revient à exiger de nous que nous donnions immédiatement les moyens géométriques de former des figures semblables. Nous donnerons ces moyens et même en général; mais nous soutenons ici que nous n'y sommes pas tenus. Nous avons posé en fait la *possibilité* de l'existence des figures semblables, et pas autre chose; cette possibilité, nous la plaçons en tête de la géométrie : on ne peut nous interdire hautement ce qu'on accorde tacitement à d'autres. Avant même de donner la définition de la similitude, M. Blanchet dit que deux figures peuvent être *équivalentes*, quoique très-*dissemblables;* Legendre, de son côté, ajoute que deux figures égales sont toujours semblables, mais que deux figures *semblables* peuvent être fort *inégales :* a-t-on demandé à ces auteurs de prouver ces propositions qui sont, à la forme près, identiques avec la nôtre? Jusqu'ici on a admis subrepticement ce postulat; pour nous, nous le plaçons en tête des propositions fondamentales de la géométrie.

On nous dira encore : l'expression de *forme* est nouvelle en géométrie; vous ne l'avez pas définie, ou la définition que vous en donnez repose sur celle de la grandeur, et, dans tous les cas, elle n'est pas géométrique. Sans doute, ce terme a été jusqu'à présent proscrit; mais la géométrie a eu tort de ne pas se servir du mot propre à la chose dont elle s'occupe; car, comme le dit Czolbe, la géométrie n'étudie que la forme. Quant à la définition que nous en donnons, c'est la seule possible: la géométrie, comme géométrie, n'a pas à définir son

objet ; pas plus que l'arithmétique n'a à définir la grandeur; ou la mécanique, le mouvement. Essayez de définir l'une de ces idées, et vous tomberez infailliblement dans un cercle. Vous direz, comme l'Académie : *la forme, c'est la* figure *extérieure des corps;* et, *la figure, c'est la* forme *extérieure des corps.* Vous définirez, avec un grand nombre de mathématiciens, la *quantité* ou *grandeur*, *ce qui peut être augmenté ou diminué*, sans songer que *augmenter*, c'est *rendre plus grand*, et que *diminuer*, c'est *rendre moins grand;* que, pour *augmenter*, il faut ajouter une *grandeur*, et, pour *diminuer*, ôter une *grandeur.* Ces définitions n'en sont pas. Veut-on toutefois une définition métaphysique de la grandeur et de la forme? Nous dirions que la première est la *substance* de la figure, que la seconde en est l'*essence.* Ce sont les deux manières dont nous apercevons tout phénomène. Matériellement, je ne puis pas changer la grandeur des choses, et je puis en changer la forme ; dans le domaine des faits, la grandeur, la quantité est en dehors de ma puissance, la forme dépend de moi jusqu'à un certain point ; dans le domaine idéal, la forme s'impose à moi, et la grandeur est mon esclave ; je la change dès que je change d'unité, et l'unité est *arbitraire.* Mais ces distinctions, qui peuvent avoir une certaine valeur pour les philosophes, n'ont aucune importance en géométrie. Le géomètre est obligé d'accepter la forme, la grandeur et leurs propriétés, sans remonter à leur source, sous peine de cesser d'être géomètre et de passer dans le camp des philosophes.

Après cette digression, reprenons la suite de notre sujet.

Deux figures qui ont même grandeur sont dites *équivalentes.*

Deux figures qui ont même forme sont dites *semblables*.

Deux figures qui ont à la fois même grandeur et même forme sont dites *égales*.

Les figures équivalentes ne diffèrent qu'en forme ; les figures semblables ne diffèrent qu'en grandeur.

Changer la forme, c'est *déformer* ou *transformer* (1).

Changer la grandeur, c'est *augmenter ou diminuer*; mais, pour exprimer qu'on change la grandeur sans changer la forme, nous emploierons les termes de *majorer* ou de *minorer*; et en général, c'est-à-dire quand nous ne voudrons pas désigner particulièrement l'action de rendre plus petit ou de celle rendre plus grand, nous dirons toujours *majorer*.

La *grandeur* s'apprécie au moyen d'une grandeur arbitraire, regardée comme absolue, et qu'on nomme *unité*.

La *forme* s'apprécie au moyen d'une forme arbitraire mais fixe, qui prend différents noms selon les cas, et qu'on appelle *tangente*, *cercle de courbure*, *parabole osculatrice* d'un ordre quelconque, *plan tangent*, etc.

Et, en général, la figure peut s'apprécier sous le rapport à la fois de la grandeur et de la forme au moyen d'une figure fixe dans l'espace, qui se nomme *axes des coordonnées*, lorsque ce sont trois droites qui partent d'un même point; *plans coordonnés*, lorsque ce sont trois plans qui se coupent; *plans de projections*, en géométrie descriptive, etc. Cette figure fixe, quelle qu'elle soit, nous la nommons *axe*.

Proprement, la figure et son axe forment une *figure composée*. L'axe peut être lui-même une partie de la

(1) On dit *transformer*, quand une forme donnée est le but de la déformation.

figure ou la figure entière. C'est ainsi que les axes d'un triangle peuvent être pris parmi ses côtés.

Deux grandeurs qui sont dans le même rapport avec leurs unités respectives, sont dites *proportionnelles.*

Dans deux figures semblables, les parties qui sont dans les mêmes rapports (1) à l'égard de leur figure totale respective prise pour terme de comparaison, sont dites *homologues.*

Dans deux figures égales, nous nommons *similaires* les parties correspondantes sous le double rapport de la grandeur et de la forme.

L'espace est homogène : il suit de là qu'une figure peut se transporter partout dans l'espace sans changer de propriétés ; deux figures égales sont donc, en général, *superposables,* et les parties similaires de l'une peuvent couvrir exactement les parties similaires de l'autre (2).

L'espace est homogène : il suit de là que, dans la *majoration*, les différentes parties de l'espace croissent en proportion ; *si je double l'espace, chaque partie de l'espace est doublée.* Un objet composé de barres de cuivre et de barres de zinc, au contraire, un pendule compensateur, par exemple, n'est pas dans ce cas ; si on le chauffe, certaines parties se dilateront plus que les autres ; mais dans un corps homogène, toutes les parties se dilateront en proportion de leur grandeur respective.

---

(1) Ces rapports ne peuvent recevoir de définition précise que plus tard, quand on aura défini la *direction* et l'*angle*.

(2) On voit que l'expression de *similaire* est plus précise que celle d'*égale*. Dans deux figures égales, en effet, les parties *égales* ne sont pas nécessairement *similaires* : tels seraient deux polygones égaux réguliers en partie.



Nous allons passer maintenant à la critique de ces notions, telles que les exposent les géométries ordinaires, et montrer par là qu'il est impossible, sans avoir recours à nos principes, d'en donner des définitions qui soient à l'abri de toute objection.

De l'Égalité et de l'Équivalence.

Legendre, et, après lui, M. Blanchet, placent parmi les axiomes la définition de l'égalité, ce qui prouve que l'on n'est pas fixé sur la signification du mot *axiome :* « Deux grandeurs, ligne, surface, ou solide, sont égales, lorsqu'étant placées l'une sur l'autre, elles coïncident dans toute leur étendue. » (Livre I.)

Cette définition n'est pas générale et philosophique, mais simplement particulière et empirique. Comment y faire rentrer l'égalité de deux intervalles de temps, de deux forces, de deux corps, de deux expressions numériques ou algébriques, de deux membres d'une égalité, d'une équation quelconque, comme $5+7=12$? (1). On prend pour une définition de l'égalité un moyen de vérification : les figures sont égales avant qu'on les place l'une sur l'autre. Reste maintenant une difficulté relative aux figures symétriques (les deux mains, ou deux figures symétriques sur une surface donnée, par exemple) ; car c'est là aussi, comme on le sent bien, et

(1) Il semble, au premier abord, que quelques-unes de ces égalités ne rentrent pas non plus dans notre définition ; mais c'est que la plupart d'entre elles sont purement arithmétiques, c'est-à-dire, posées entre *grandeurs*, abstraction faite de la *forme*. Si l'on voulait absolument conserver celle-ci dans la définition de l'égalité, on ne pourrait dire $5+7=12$, car le premier membre n'a pas la même forme que le second. N'est-ce pas là encore une raison qui renforce ce que dit Kant sur ce jugement, qu'il regarde comme *synthétique ?*

comme nous le démontrerons, un cas d'égalité, et il échappe à l'axiome de Legendre (1).

Passons à la définition de l'équivalence :

« J'appellerai *figures équivalentes*, dit Legendre, celles dont les surfaces sont égales. » (Livre III.)

Si l'on rapproche cette définition de celle de l'égalité, on ne tardera pas à remarquer la confusion des termes définis : il en résulte, en effet, que, pour être équivalentes, deux figures doivent être égales, ce qui n'est pas la pensée de Legendre. On ne nous dit pas d'ailleurs quelle distinction on établit entre surface et figure : dans la seconde définition, la surface est évidemment autre chose que la figure; dans la première, c'est la figure même. La confusion entre l'égalité et l'équivalence se reproduit plus loin, lorsqu'il fait remarquer que deux figures semblables peuvent être fort *inégales*.

M. Blanchet a cherché à corriger Legendre :

« L'*aire* d'une figure, dit-il, est le rapport de son étendue à l'unité de surface. — Deux figures *équivalentes* sont celles qui ont la même aire. »

Mais ne pourrait-on pas voir une substitution de mots dans cette définition de l'*aire* basée en partie sur l'*étendue*? Cette définition est, en outre, inexacte et incomplète : — inexacte, car l'*aire* n'est pas un *rapport*, mais une *mesure*; le rapport de l'are au mètre carré est *cent* et *cent* n'est pas l'aire d'un are — incomplète, car elle ne s'applique ni aux lignes, ni aux solides. Ces vices proviennent de ce qu'on n'a pas voulu employer le terme générique de *grandeur*, qui simplifie le lan-

1) Nous ne parlons pas de deux figures planes symétriques, parce qu'on en vérifie l'égalité en les *rabattant* l'une sur l'autre. Cependant l'opération du rabattement n'est pas proprement du ressort de la géométrie plane.

gage et le mécanisme de la pensée, tandis qu'on n'hésite pas à se servir des termes de *longueur, aire, volume*, qui servent à exprimer la *grandeur* des différentes classes de figures.

De la similitude.

« Deux figures (1) sont *semblables*, lorsqu'elles ont les angles égaux chacun à chacun, et les *côtés homologues* proportionnels. Par côtés homologues, on entend ceux qui ont la même position dans les deux figures, ou qui sont adjacents à des angles égaux. Ces angles eux-mêmes s'appellent *angles homologues.* » (Legendre, livre III).

« En général, nous appellerons polygones *semblables* ceux qui ont les angles égaux chacun à chacun, et les côtés homologues proportionnels (en entendant par côtés homologues ceux qui sont adjacents aux angles égaux). » (Blanchet, livre III).

« Les figures rectilignes *semblables* sont celles dont les angles sont égaux chacun à chacun, et dont les côtés placés autour des angles égaux sont proportionnels. » (Euclide, traduction de Peyrard).

Ces auteurs, comme on le voit, sont assez embarrassés pour définir les côtés homologues; il est très-possible, en effet, que, dans deux figures semblables, des côtés non homologues soient adjacents à des angles égaux chacun à chacun.

Cette définition est surabondante, c'est-à-dire, que pour être justifiée, elle demande un théorème intermédiaire, qui s'énonce ainsi dans le cas du triangle: Deux triangles qui ont les angles égaux ont leurs côtés homologues proportionnels. Elle ne correspond pas à

(1) Il faut sous-entendre ici l'épithète de *rectilignes.*

l'idée vulgaire de similitude : deux triangles sont-ils semblables en tout et partout quand ils ont les angles égaux et les côtés homologues proportionnels? Ajoutez qu'elle est différente pour les figures rectilignes, pour les polyèdres, pour les courbes, pour les surfaces courbes. Pour les courbes, en effet, on ne peut plus parler d'angles égaux et de côtés proportionnels; il faut avoir recours à d'autres caractères :

« Deux courbes sont *semblables*, lorsqu'on peut les placer de telle sorte, qu'en menant par un même point, des rayons vecteurs aux différents points des deux courbes, les rayons vecteurs dirigés suivant les mêmes droites, sont proportionnels » (Lefébure de Fourcy, *Géométrie analytique*).

Cette définition n'est qu'un moyen de vérification; et ce moyen est même impraticable en géométrie synthétique; car on ne dit pas comment on peut trouver cette position des deux courbes. De plus, elle ne s'applique qu'aux figures planes. Pour les figures à double courbure on devrait dire :

Deux figures sont *semblables*, lorsqu'on peut les appliquer sur un même cône, de manière que les longueurs des génératrices interceptées entre les courbes et le sommet soient proportionnelles.

Cette définition seule serait générale pour les lignes. La difficulté augmente encore, quand il s'agit de définir deux surfaces semblables, et notamment les surfaces à double courbure. Bref, ces définitions, à l'inverse de quelques autres, permettent jusqu'à un certain point de tracer une figure semblable à une autre, mais non de reconnaître directement, si une figure est semblable à une autre; c'est-à-dire, qu'elles manquent le but qu'elles semblent avoir en vue.

M. Noël (1) seul définit les figures semblables, *celles qui ont la même forme;* seulement il ne démontre pas — et c'est pourtant nécessaire — que les figures semblables jouissent des propriétés renfermées dans les définitions que nous venons de critiquer. Pour lui les triangles équiangles ont les côtés homologues proportionnels, et réciproquement; tandis qu'en réalité les triangles équiangles ont plus que leurs côtés homologues proportionnels, ils sont *semblables.* Cette lacune nous la comblerons plus tard, grâce au principe de l'homogénéité de l'espace.

Les définitions que nous donnons de l'équivalence et de la similitude ont l'avantage d'être tirées d'un principe unique, d'être nominales, c'est-à-dire définitions de noms, et de ne rien préjuger quant aux propriétés de la similitude, en un mot, de satisfaire aux règles que nous avons données de la définition géométrique. En outre, la dernière est vulgaire, c'est-à-dire, répond au sens que l'on attache au mot *ressemblance;* elle est d'accord avec ce que nous observons tous les jours dans les portraits, les gravures, les cartes de géographie, les plans, les statuettes réduites, les effets du microscope, toutes choses qui ont pour but de laisser la forme intacte en n'altérant que la grandeur, de représenter en *petit* ce qui est *grand*, et inversement.

Nous allons maintenant démontrer deux théorèmes généraux qui complètent et résument ce qui précède :

Théorème I. *Les figures semblables ont leurs lignes homologues proportionnelles.*

Soient deux figures semblables; supposons qu'une ligne quelconque P Q de la première ait pour homo-

---

(1) *Traité de Géométrie élémentaire*, Liége 1844; préface, p. 3.

logue la ligne $p\,q$ de la seconde, et prenons ces lignes pour unités respectives des longueurs des deux figures. Puisque les figures semblables ne diffèrent qu'en grandeur, en majorant la plus petite, elle finira par devenir égale à la plus grande, et leurs lignes homologues étant devenues égales ainsi que leurs unités, les rapports de ces lignes à celles-ci sont les mêmes des deux parts; mais, par la majoration, j'ai augmenté toutes les lignes de la seconde figure proportionnellement; donc, avant comme après la majoration, les rapports de ces lignes à leur unité étaient les mêmes que dans la première figure; et l'on peut poser en général, entre des lignes homologues A M B et P Q de l'une, et $a\,m\,b$ et $p\,q$ de l'autre, la proportion : A M B : P Q $= a\,m\,b : p\,q$.

Corollaire. *Pour démontrer que certaines lignes sont en proportion, il suffit de prouver qu'elles sont susceptibles de former des figures semblables en y devenant homologues.*

Nous avons démontré un peu longuement peut-être une proposition évidente; mais nous avons voulu ramener la proportionnalité des lignes homologues des figures semblables à la définition que nous avons donnée de la proportion.

Théorème II. *Quand deux figures ont leurs lignes proportionnelles, elles sont semblables.*

Majorant la plus petite, on la rend *égale* à la plus grande, puisque toutes ses lignes deviennent égales aux lignes de celle-ci (1); les deux figures ne diffèrent donc qu'en grandeur, et par suite sont semblables. C.Q.F.D.

---

(1) Il est inutile, pensons-nous, de prouver cette proposition que *deux figures sont égales quand leurs lignes le sont.* La réciproque de l'inverse à savoir, que *deux figures sont inégales quand plusieurs de leurs lignes sont inégales*, est d'ailleurs de la plus grande évidence.

Ces deux théorèmes, si importants par leurs conséquences, réduisent la géométrie à n'être plus que la science des formes et des comparaisons de grandeurs. Dans l'étude d'une figure, on fait abstraction de sa grandeur, parce que celle-ci est toujours à la disposition du géomètre qui la change en changeant l'unité de mesure ou en majorant l'espace qui renferme la figure. Ils nous donnent enfin une définition nouvelle et plus géométrique de la *forme* : *La forme dépend des rapports de grandeur des parties de la figure.*

Des procédés de démonstration.

Nous avons vu que, pour démontrer un théorème sur l'égalité de deux figures, il faut les superposer (1); que, pour démontrer que deux figures sont semblables, il faut démontrer la proportionnalité de leurs lignes, ou, ce qui revient au même, il faut les ramener à la même grandeur sans en changer la forme, et voir si elles sont égales. De même pour démontrer que deux figures sont équivalentes, il faut les déformer, sans en changer la grandeur, de manière à les rendre égales.

Nous allons préciser le précepte, et compléter ainsi ce que nous avons dit sur la preuve expérimentale et les lignes auxiliaires.

Prenons pour exemple le théorème de Pythagore; il s'agit de démontrer l'équivalence de deux figures dissemblables, à savoir: *le carré construit sur l'hypoténuse,* et *la figure formée par les deux carrés construits sur les côtés de l'angle droit.*

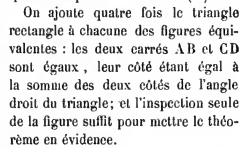
Pour établir cette équivalence, deux artifices sont à notre disposition : — l'un, éminemment intuitif et

(1) Voir, dans le livre III, ce que nous disons sur les figures symétriques.



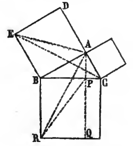
procédant par voie de discontinuité, consiste à retrancher des parties *égales* des deux figures *équivalentes* et à montrer que les restes sont *égaux;* ou à ajouter des parties *égales* et à montrer que les sommes sont *égales*; ou à combiner ces deux moyens, c'est-à-dire à ôter et à retrancher à la fois des parties égales — l'autre, procédant par voie de continuité, consiste dans la transformation graduelle des deux figures, jusqu'à ce qu'elles aient la même forme.

Voici des exemples de la première méthode (1) :



On ajoute quatre fois le triangle rectangle à chacune des figures équivalentes : les deux carrés AB et CD sont égaux, leur côté étant égal à la somme des deux côtés de l'angle droit du triangle; et l'inspection seule de la figure suffit pour mettre le théorème en évidence.

La seconde méthode procède, avons-nous dit, par voie de déformation continue : on transforme la moitié



ABE du carré ABED, en le triangle CBE, en faisant glisser le sommet A en C le long d'une parallèle AC à la base BE; de même on transforme la moitié PBR du parallélogramme PBRQ, en faisant glisser le sommet P du triangle PBR, en A, le long de PA parallèle à la base BR;

(1) Voir deux démonstrations analogues dans le *Magasin pittoresque* (1843); celle-ci nous appartient, croyons-nous, sans toutefois oser l'affirmer.



les deux triangles C B E et A B R sont *égaux*; donc, etc. On a ainsi *déformé* ou *transformé* deux figures équivalentes, les triangles A B E et P B R en deux figures égales, les triangles CBE et ABR.

La première méthode de démonstration est plus intuitive que la seconde; c'est une espèce de *casse-tête chinois*, comme le dit l'auteur des démonstrations reproduites dans le *Magasin pittoresque*; l'autre paraît plus rationnelle, plus géométrique, car elle procède principalement par voie de raisonnement; mais, en réalité, c'est la première qui sert de base à l'autre. La preuve en est le théorème fondamental de la mesure des aires : *Un parallélogramme est égal à un rectangle de même base et de même hauteur;* dont la démonstration consiste essentiellement à transporter le triangle AFE en BDC, à ajouter et à retrancher à la fois deux parties égales; ou, si l'on veut, à retrancher aux deux figures le même triangle, de manière qu'il reste la même figure AEDB; ou encore, à ajouter aux deux figures le même triangle, de sorte qu'il en résulte la même figure ABCF.

Cette déformation ou transformation n'est pas toujours possible par les moyens ordinaires; le cercle en est un exemple célèbre; on a démontré qu'il ne peut être transformé en carré.

Malgré la symétrie que nous avons mise dans les modes de démonstration des théorèmes sur la forme et la grandeur, il y a pourtant entre ces modes une différence essentielle qui repose d'ailleurs sur la différence métaphysique de la grandeur et de la forme. La majoration est une opération précise, dont les moyens et le but sont connus, tandis que la déformation est

arbitraire : dans la majoration, on agit suivant un procédé déterminé; en déformant, au contraire, on opère au hasard, et l'on arrive au but à peu près de même. Et il est facile de comprendre qu'il doit en être ainsi : majorer et minorer, ou changer la grandeur, c'est aller du plus au moins, ou du moins au plus; pour passer de la quantité *a* à la quantité *b*, il n'y a qu'un chemin à prendre. Mais il n'en est guère de même pour passer de la forme A à la forme B; les voies ici sont innombrables. De là cette différence profonde entre les démonstrations qui se rapportent aux formes et celles qui ont trait aux grandeurs.

Pour nous résumer sur les règles de la démonstration, nous dirons que *la démonstration est une vérification, une expérience.*

Toute vérification consistant à constater une égalité ou une inégalité, le moyen le plus intuitif, le plus immédiat, le plus simple, est la *superposition.* Il conduit directement au but, quand on a à démontrer l'*égalité* de deux figures; et indirectement, quand on a à établir leur *équivalence* ou leur *similitude;* dans le premier cas, on *transforme;* dans le second, on *majore.*

§ 2. L'ESPACE : HOMOGÉNÉITÉ, ISOGÉNÉITÉ, CONTINUITÉ; POSTULATS ARITHMÉTIQUES.

Un quantum est *homogène*, quand il se compose de parties *semblables.* — L'espace, le plan et la droite sont des quantums homogènes.

Un quantum est *isogène*, quand il se compose de parties *égales.* — Outre les quantums précédents, la sphère, le cercle, les angles, l'hélice, les parallélipipèdes, les parallélogrammes, les surfaces de révolution



sont absolument ou relativement isogènes, c'est-à-dire isogènes dans tous les sens, ou dans quelques sens.

Un quantum est *continu*, quand il se compose de parties *équivalentes*.

Ou encore :

Un quantum homogène est indéfiniment divisible en parties semblables; un quantum isogène, en parties égales; un quantum continu, en parties équivalentes.

Tout quantum homogène est à la fois isogène et continu, tout quantum isogène est continu; ces propositions résultent immédiatement des postulats sur la grandeur et la forme. Ainsi, ce qu'on dira de la continuité, se dira de l'isogénéité et de l'homogénéité; ce qu'on dira de l'isogénéité pourra se dire de l'homogénéité.

C'est un fait d'expérience, dit M. Ueberweg, qu'un corps peut se mouvoir sans éprouver d'altération; cela n'est possible que si nous regardons l'espace comme *homogène*. Pour cet auteur donc, cette homogénéité consiste en ce que l'espace est composé de parties égales; celles-ci, il est vrai, ne sont pas juxtaposées, comme dans un polygone régulier, mais se pénètrent mutuellement. C'est une propriété qui fait que l'espace est divisible en parties égales arbitraires, les points de division étant eux-mêmes arbitraires; et qu'une partie quelconque peut occuper le lieu de toute autre partie égale. Mais cette notion de l'homogénéité est incomplète; on ne pourrait pas dire, en ce sens, qu'une surface homogène est plane, qu'une ligne homogène est droite; car cette définition conviendrait tout aussi bien à la surface sphérique et à la circonférence qu'au plan et à la droite. La circonférence, en effet, est homogène dans le sens de M. Ueberweg; une portion *quel-*

conque d'une circonférence, peut glisser sur la circonférence entière sans la quitter; la circonférence est divisible arbitrairement en parties égales, elle est composée de parties égales. Ce que nous disons de la circonférence s'applique également à la surface sphérique. Mais, dans l'une comme dans l'autre, une partie n'est pas l'image du tout, et elle diffère du tout, non seulement en grandeur, mais aussi en forme. Je n'engendrerai pas une circonférence en *majorant* un arc de circonférence, mais en l'*ajoutant* à lui-même ou en le faisant glisser sur lui-même; si je ne fais que majorer un arc de circonférence, j'ai un arc semblable d'un rayon plus grand ou plus petit, mais non une partie ou un multiple de l'arc primitif. La circonférence et la surface sphérique ne sont pas *homogènes* comme la droite, le plan et notre espace, mais simplement *isogènes*, comme l'espace de M. Ueberweg.

Nous avons maintenant à expliquer, et peut-être à justifier notre définition de la continuité (1).

M. Ueberweg dit : « *Une grandeur continue est celle que l'on peut augmenter ou diminuer infiniment peu ;* » et plus loin il ajoute : « *Il existe un ensemble continu et homogène* (isogène), *divisible et extensible à l'infini, de lieux qu'un corps matériel peut occuper; cet ensemble, nous le nommons* espace. »

Nous ne savons si l'infiniment petit peut entrer dans la définition de la continuité, si ce ne serait pas plutôt celle-ci qui devrait servir à expliquer celle-là; mais quoi qu'il en soit, la définition ne nous apprend absolument rien. Une grandeur discontinue ne peut-elle pas,

(1) *Continuité*, liaison non *interrompue* des parties d'un tout; *interrompre*, rompre la *continuité* d'une chose. — Diction. de l'Acad.

sans cesser d'être discontinue, s'augmenter infiniment peu, soit que l'on augmente les parties continues de cette discrétion, soit que, dans les vides, on place un infiniment petit qui se mette à croître continuellement? De plus, la continuité est une propriété absolue et non relative : une grandeur continue, qu'on puisse l'augmenter ou qu'on ne le puisse pas, (la masse d'une planète, par exemple) n'en est pas moins continue.

Quant à nous, nous croyons être resté fidèle à la notion vulgaire de continuité (1). Un corps est continu quand il ne contient pas de *vide*. En géométrie, comme en physique, la notion du vide, de la *figure négative*, comme nous le dirons bientôt (2), n'est pas la notion du *néant*, du *rien*; c'est la notion de quelque chose d'*autre*, mais indéterminé : deux molécules séparées par un espace *vide*, ne sont pas séparées par *rien*, car, dans ce cas, elles se toucheraient. Cela posé, si je

a b c d e m n

considère une grandeur discontinue *abcdemn*, il est clair que je ne puis pas poser $ab = gc = cd = de$. Mais, me dira-t-on, puisque, dans une figure continue, les parties sont de même grandeur, ne peut-on pas poser : $mn = ag$, en supposant que les portions de la ligne *mn* réunies fassent *ag*? La réponse se trouve précisément dans ce mot *réunir*, qu'on vient intercaler; c'est dire au fond : si les parties de *mn*, au lieu d'être discontinues, étaient continues, et qu'elles eussent la même grandeur que *ag*, ne lui seraient-elles pas équi-

(1) « L'espace est *illimité* et *continu*, c'est-à-dire que la fin de l'un est le commencement do l'autre. » (Albert de Gloss; *Wie viel entdeckte bis jetzt die neue Wissenschaft*, Braunschweig, Westermann 1859, II. — La définition de M. Gloss rentre dans la nôtre.

(2) Voir le paragraphe suivant.

valentes ? Ce qui est supposer le contraire de l'hypothèse. Le quantum *an* n'est pas la réunion des parties pleines de *an*, c'est cet ensemble de *plein* et de *vide*, de grandeur *posée* et de grandeur *niée*; et l'une est grandeur au même titre que l'autre, quoique l'une ne puisse pas se remplacer par l'autre. L'idée de *continuité* est inévitable partout, dans le domaine des sciences physiques, comme dans celui de la géométrie et de l'arithmétique : la détermination de la densité d'un corps suppose la continuité de ce corps. Bien plus, la porosité même ne se conçoit que comme continue ; et c'est pour échapper à cette contradiction éternelle, que l'on se jette dans les bras d'une autre contradiction, l'atomisme.

De nos définitions de l'homogénéité, de l'isogénéité et de la continuité, résultent les règles de la génération des quantums.

On engendre un quantum *homogène*, par la majoration de l'une de ses parties; on engendre un quantum *isogène*, en faisant glisser l'une de ses parties sur elle-même; on engendre un quantum *continu*, en faisant glisser, en même temps qu'on la déforme, une de ses parties sur elle-même.

Ces notions, qui sont les qualités fondamentales de la grandeur, les formes sous lesquelles elle nous apparaît, nous fournissent trois postulats, qui ne sont pas proprement des postulats géométriques, mais les postulats de la science de la quantité en général, des mathématiques, ou, si l'on veut, de l'arithmétique seule. On a pu voir, par notre génération des sciences, que les postulats de celle-ci sont nécessairement des postulats de la géométrie, comme ceux de la géométrie sont des postulats de la mécanique.

Nous demandons :

au point de vue de l'*homogénéité*,

Que *tout quantum puisse être considéré comme l'image réduite ou agrandie d'un quantum plus grand ou plus petit ;*

au point de vue de l'*isogénéité*,

Que *tout quantum puisse être considéré comme le multiple ou le sous-multiple d'un autre quantum ;*

au point de vue de la *continuité*,

Que *tout quantum puisse être considéré comme la somme ou la différence d'autres quantums.*

Ces postulats peuvent se mettre sous la forme suivante, qui est plus vulgaire peut-être :

Le tout peut être considéré comme l'image d'une de ses parties ;

Le tout peut être considéré comme le multiple d'une de ses parties ;

Le tout peut être considéré comme la somme de ses parties.

Ces postulats sont aussi nécessaires et aussi inévitables l'un que l'autre. En arithmétique, la méthode connue sous le nom de *réduction à l'unité* (1) s'appuie sur le premier ; et, comme nous l'avons vu plus haut, il constitue, en géométrie, le fondement de la théorie des figures semblables.

La plupart des auteurs ont admis comme axiome le troisième des postulats arithmétiques, *le tout est égal* (2) *à la somme de ses parties.* C'est supposer qu'un quantum décomposé, puis recomposé, n'importe comment,

(1) Exemple : Si de la moitié d'un nombre on en ôte le tiers, le reste est 2. Solution : *Si ce nombre était l'unité*, le reste serait 1/6 ; ce nombre est donc 12.

(2) Il faut proprement *équivalent*.

n'en reste pas moins le même quantum. Mais aucun d'eux n'a posé, ni en axiome ni en postulat, que *le tout peut être considéré comme le multiple d'une de ses parties:* qu'on peut, en général, établir, par exemple,

A———C———D———B.

entre une droite et l'une de ses parties, la relation $AB = m.\, CD$. Ils ont même cru que cette proposition n'était nullement nécessaire, et dans chaque cas particulier, ils ont essayé de la remplacer par une démonstration à l'absurde. Nous sommes ici sur le terrain des incommensurables, et nous allons montrer, sur un exemple, combien sont illusoires les moyens par lesquels on a cru les éviter.

Théorème (1). Quel que soit le rapport des deux angles ACB, ACD, ces deux angles seront toujours entre eux comme les arcs AB, AD, interceptés entre leurs côtés et décrits de leurs sommets comme centres avec des rayons égaux.

Supposons que ACB soit à ACD, comme l'arc AB est à un arc AO plus grand que AD. (Le raisonnement est identique dans la supposition de AO plus petit que AD). Divisant l'arc AB en parties égales, plus petites que DO, l'un au moins des points de division tombera entre D et O, au point I, par exemple; et l'on aura :

$$ACB : ACI = AB : AI\,;$$

mais par hypothèse on a la proportion :

$$ACB : ACD = AB : AO.$$

Ces deux proportions ne peuvent subsister en même temps, puisque les antécédents sont les mêmes, et que

(1) Legendre, *Géométrie*, Livre II; Proposition XVII.

l'un des conséquents ACI surpasse ACD, tandis que AI est surpassé par AO. Or, la première étant vraie, la seconde est nécessairement fausse. Donc, on a rigoureusement : ACB : ACD = AB : AD.

Le postulat admis, cette démonstration devient inutile, comme nous le montrerons bientôt. Mais permet-elle d'éviter le postulat? nous allons essayer de faire voir qu'il n'en est rien. Notre critique, complétement nouvelle, croyons-nous, revêt une apparence subtile et sophistique qui nous oblige à quelques développements. Nous ne les regretterons pas si nous parvenons à nous faire comprendre.

Toute démonstration suppose que la contradiction est possible. Dans le cas actuel, on nie que les angles soient entre eux comme les arcs. Le géomètre dit alors à son contradicteur : Si ACB n'est pas à ACD comme AB est à AD, donnez-moi un autre rapport; j'en montrerai la fausseté. — Et en effet, ce rapport étant supposé AB : AO, il montre, par une division de l'arc AB, en parties *plus petites que* DO, que le point O a été pris trop loin. Mais son adversaire peut lui répondre : Je vois maintenant que la supposition AO ne vaut rien; plaçons le point O où se trouve le point I, et votre démonstration n'est plus valable. — Le géomètre devra donc recommencer à diviser l'arc AB en parties égales, mais cette fois *plus petites que* DI, et son contradicteur ne se trouvera jamais convaincu que de la fausseté de la supposition *actuelle*, et non d'une supposition *quelconque*. Sans doute, aussitôt qu'il pose une affirmation, on lui en montre la fausseté; mais s'il s'en tient purement à la négative, sans chercher à donner lui-même une solution, s'il suit son adversaire pas à pas, attendant un point I, avant de placer le point O,

il le réduit à l'impuissance, ou, tout au moins, à l'inaction (1).

On nous dira peut-être que nous condamnons par là toutes les démonstrations à l'absurde. Ainsi, par exemple, si ACB + BCE = 2 angles droits, les côtés AC et CE sont en ligne droite. S'ils ne le sont pas, prolongeons AC en CD, et nous aurons, par voie de conséquence : BCE = BCD, ce qui est absurde.

Mais il est facile de saisir la différence essentielle qui existe entre cette démonstration et la précédente. Le tracé de la droite auxiliaire CD ne dépend pas, de la supposition particulière de l'adversaire ; qu'il place son côté CE comme il le veut, le prolongement CD ne varie pas, non plus que les formules, les équations, tandis que le point I converge indéfiniment vers le point D. C'est l'adversaire qui se trouve forcé, quelque subterfuge qu'il emploie, de placer CE sur CD. Dans cette dernière démonstration, en un mot, ma construction, ma réponse est faite d'avance ; quoi que dise mon adversaire, je n'ai rien à y changer, elle est *absolue*. Dans l'autre, au contraire, je dois attendre ce qu'il va dire, je n'ose tirer une ligne avant la sienne, ma réponse est *relative*, *ad hominem*. Sans doute, nous ne prétendons pas le nier, le mode de raisonnement, la nature de la construction restent les mêmes dans toutes les suppositions ; mais au fond il y a ici une véritable *induction* : on voit que ce mode de raisonnement est

---

(1) On pourrait dire aussi que cet argument n'est que le sophisme renouvelé d'Achille et de la Tortue. Nous renvoyons sur ce point au livre suivant où nous examinons l'objection en traitant des *Parallèles*

applicable à tous les cas ; c'est comme si, pour prouver que le carré d'un polynome contient le carré de tous les termes, plus leurs doubles produits deux à deux, on disait à l'adversaire : choisissez un polynome, j'ai mon raisonnement tout prêt pour vous convaincre ; je l'élèverai au carré. Cela suffit-il ? (1).

Mais admettons même la légitimité de l'induction, légitimité logiquement incontestable, nous le reconnaissons ; la difficulté n'en reste pas moins sans solution *complète*, elle continue à subsister dans son essence. En effet, la démonstration suppose qu'entre le point D et le point O on puisse trouver un point I intermédiaire, en d'autres termes, que l'arc DO est fini. Or, il s'agit d'établir que la proportion ACB : ACD = AB : AD est vraie à un infiniment petit près. De plus, on ne peut supposer que, AD étant incommensurable avec AB, l'arc AI, qui est un peu plus grand que AD (le point I étant infiniment près du point D), soit commensurable avec AB ; en d'autres termes, la question est de savoir si, entre deux arcs, AD et AO, différant peu l'un de l'autre, il y a nécessairement un arc AI commensurable avec l'arc AB (2).

(1) Ainsi encore pour démontrer que, si par un point pris dans l'intérieur du triangle, on mène deux droites aux extrémités d'un même côté, leur somme est plus petite que la somme des deux autres côtés ; on tire une droite, prolongement de l'une des deux autres ; et la démonstration est générale. Mais si pour une position du point intérieur, on devait tirer une droite ; pour une autre, deux droites ; pour une troisième, quatre droites, et ainsi de suite, pourrait-on encore soutenir la généralité de la démonstration ?

(2) On emploie un procédé analogue pour démontrer que deux pyramides de bases équivalentes et de hauteurs égales sont équivalentes ; seulement, il n'est pas nécessaire, pour la démonstration, de diviser la hauteur en parties aliquotes plus petites que la hauteur u prisme différence (Legendre, *Géométrie* ; Livre VI, prop. XVII).

Ce postulat inévitable en algèbre, où les quantités sont de leur nature continues, l'est aussi en arithmétique : l'équation $\frac{1}{3} = 0{,}333...$ n'est autre chose qu'une comparaison entre incommensurables, entre 1/3 et les puissances négatives de 10. L'extraction des racines repose sur ce postulat : vouloir extraire la racine de 2, et opérer sur le nombre 2, comme si c'était un carré parfait, c'est admettre à priori que tout nombre peut être considéré comme un carré, ce qui, encore une fois, est un cas particulier de ce postulat.

Dès que l'on admet comme vrai que, quelle que soit la grandeur des portions AB et CD d'un quantum isogène, on peut poser $AB = m\,CD$, c'est-à-dire leur supposer une commune mesure, on peut démontrer immédiatement les théorèmes généraux suivants qui servent à coordonner tous les théorèmes particuliers (mesure des angles plans et dièdres, des parallélogrammes de même base, des parallélipipèdes, etc).

A C D B

Lemme. *Dans la génération des quantums isogènes, les parties de la partie génératrice engendrent des quantums isogènes*: — Ainsi, étant donné un secteur élémentaire qui, par rotation autour du sommet, engendre un angle, l'arc élémentaire de ce secteur engendre l'arc de l'angle, quantum isogène.

Définition. Le quantum engendré par la partie et celui engendré par une partie de celle-ci, forment ce que nous nommons *un couple* de quantums isogènes.

Théorème I. — *Dans un couple de quantums isogènes, le multiple de l'un des quantums correspond au même multiple de l'autre.*

THÉORÈME II. — *Deux couples de quantums isogènes de même nature, c'est-à-dire pouvant faire partie du même quantum, forment toujours une proportion.*

Ainsi, ayant les deux couples ACB, AB et ACD, AD, on peut écrire :

$$ACB : AB = ACD : AD.$$

Car, en vertu du postulat et du théorème, on a :

$$ACB = m\,ACD, \text{ d'où } AB = m\,AD.$$

§ 3. — L'ESPACE : SOLIDE, SURFACE, LIGNE ET POINT; LES TROIS DIMENSIONS.

Déterminer un espace, c'est le limiter, et ce qui est déterminé, ou *la figure*, provient de *la position de l'espace en deçà et la négation de l'espace au delà de la limite.* Toute figure *positive* a donc sa figure complémentaire ou *négative*. Je puis aussi bien appeler *cercle*, l'espace qui s'étend depuis le centre jusqu'à la circonférence, que celui qui s'étend à partir de celle-ci jusqu'à l'infini. Il suffit en général de considérer l'une de ces deux figures : mais tantôt l'on étudie l'une, tantôt l'autre, et parfois toutes les deux ensemble. Ainsi, la couronne circulaire est tout aussi bien la partie commune au cercle *positif* A et au cercle *négatif* B; c'est-à-dire à la figure renfermée par la circonférence A et à celle qui, s'étendant à l'infini, s'arrête à la circonférence B, que la partie non commune aux cercles *positifs* A et B ou aux cercles *négatifs* B et A. Quand on démontre que les angles externes d'un polygone sont égaux à quatre droits, c'est pour obtenir la somme des angles internes ; la figure *négative* sert à démontrer une propriété de la figure *positive*. Enfin,

pour donner des exemples plus décisifs, dans une courbe non fermée, on ne peut pas raisonnablement considérer plutôt un côté de la limite que l'autre; l'hyperbole, quand on ne l'engendre pas par une section de cône, est tout aussi bien l'espace compris entre les branches concaves qu'entre les branches convexes de la courbe; et tout le monde sait que pour calculer l'aire de l'hyperbole, on prend non un segment intérieur, mais un segment extérieur, parce que, pour ce dernier, la relation de l'aire à l'abscisse est très-simple.

La figure positive et la figure négative comprenant tout l'espace, *la limite qui les sépare n'est pas un espace*. Je la nomme *surface*. Dans la surface, je puis concevoir de nouvelles déterminations, j'arriverai d'une manière analogue à l'idée de *ligne — la ligne n'est pas une portion de surface* — puis de celle-ci à l'idée de *point — le point n'est pas une portion de ligne* (1).

Ainsi est résolue négativement la question de savoir s'il faut considérer la surface comme l'écorce infiniment peu épaisse d'un solide, et si une infinité de surfaces superposées produisent un espace, etc. Avec un néant d'espace, un néant de surface, un néant de ligne, il est absurde de vouloir engendrer l'espace, la surface, la ligne.

Cette manière fausse de considérer le point, la ligne et la surface, vient de ce qu'on peut engendrer la ligne, la surface et le solide, au moyen du mouvement,

---

(1) De même que toute figure à deux dimensions est toujours censée être tracée sur une surface, de même il faut regarder toute figure à une dimension comme tracée sur une ligne; d'où l'idée d'une *ligne négative*. — Comparez ce que nous disons page 146, où les vides doivent être supposés occupés par une ligne arbitraire *niée*. Voir aussi le 4e paragraphe du chapitre II du livre suivant.

c'est-à-dire en faisant intervenir un facteur homogène et par suite, *indéfiniment divisible*, le *temps*. M. Ueberweg a adopté aussi la notion des écorces infiniment peu épaisses pour en tirer celle de surface, mais en se basant sur la divisibilité à l'infini de l'espace ; et, comme tant d'autres, il n'a pas voulu voir que la portion du corps obtenue par sa division à l'infini, comprenait toujours au moins deux surfaces. Mais nous reviendrons sur ce point en parlant des *éléments*.

Enfin, ceux qui définissent le *point* l'intersection de deux lignes, et la *ligne* l'intersection de deux surfaces, ne peuvent définir la *surface* l'intersection de deux corps. La considération seule des figures négatives et positives fixe le vrai sens du mot *limite*. Une feuille de papier mi-partie de blanc et de noir rend cette définition intuitive et sensible.

Pourquoi maintenant n'y a-t-il que ces trois espèces de limites possibles? La réponse à cette question est un fait, un postulat de la géométrie :

L'espace a trois dimensions.

Quand on considère les trois dimensions à la fois, on a les solides ; faites abstraction d'une dimension, vous aurez une surface ; de deux, une ligne ; de trois, le point. Mais, nous le répétons, c'est là un fait irréductible, inexpliqué jusqu'à présent, et inexplicable.

Il nous reste à définir la *dimension*.

Toute figure peut s'engendrer par le mouvement de sa limite, que le mouvement générateur soit *isogénique* ou simplement *continu*, c'est-à-dire que la limite reste invariable ou se déforme pendant son mouvement.

Tout quantum qui se pose extérieurement à lui-même par un mouvement continu, engendre un quantum d'un *ordre* supérieur.

Le *point* est la limite génératrice *première*. Par un mouvement continu qui le place toujours en dehors de sa position précédente, il engendre la *ligne*, quantum du 1er ordre. De la même manière, la ligne engendre la *surface*, quantum du 2e ordre; et la surface le *solide*, quantum du 3e ordre.

On appelle *dimension* le *quantum qui donne la mesure du mouvement générateur par lequel on passe d'un quantum d'un ordre quelconque à un quantum de l'ordre immédiatement supérieur*.

Ce quantum est pour la ligne sa *longueur*; pour la surface, étant donnée la dimension de la ligne génératrice, c'est la *largeur*, ou la trajectoire *arbitraire* (1) d'un point quelconque de cette ligne; enfin, étant données les deux dimensions de la surface génératrice, pour le solide, c'est la *hauteur*, ou la trajectoire arbitraire d'un point quelconque de cette surface.

Les *dimensions* servent à *mesurer* le quantum donné; elles sont *indifférentes*, c'est-à-dire peuvent se prendre l'une pour l'autre, car chacune d'elles est une ligne

(1) Il est bon de faire ici une distinction : la dimension *mesurée* est nécessairement une ligne droite (voir dans le livre III ce que nous disons sur les *unités*), mais la ligne que l'on prend comme une des dimensions du corps, n'est pas *nécessairement* une droite. De même que, quand je parle de la longueur d'un chemin, quoique la longueur *mesurée* (trois kilomètres par exemple), soit *rectifiée*, il n'est pas nécessaire que cette ligne soit *droite*; de même, la largeur, ou la hauteur, en tant qu'elle est exprimée par une ligne *tracée dans le corps*, peut fort bien être courbe ou sinueuse; telles seraient nécessairement les dimensions d'une surface à simple ou à double courbure. Il est bien entendu toutefois que nous n'entendons pas dénier à la ligne droite ses qualités précieuses pour la mesure; nous voulons seulement établir que les idées *intuitives* de longueur, largeur et hauteur n'entraînent pas nécessairement avec elles l'idée de droite.

plus ou moins arbitraire dans le quantum (1). Nous disons *plus ou moins*; car, par exemple, la surface génératrice étant donnée, la hauteur ne peut être une ligne de cette surface génératrice. Abstraction faite de l'intuition de l'espace, au point de vue de la quantité pure, les ordres de quantums sont en nombre infini; de là, les quantités du 4e, du 5e ordre, etc., dont parle l'algèbre; de là même, l'étude possible des courbes à quatre, à cinq variables. Mais l'espace géométrique n'a que trois dimensions; trois mouvements sont nécessaires et suffisants pour l'engendrer. Il est donc faux de dire : *L'espace a une infinité de dimensions, et par convention, on en considère trois principales*; c'est confondre avec le nombre des dimensions l'infinité des lignes mesures possibles, mais entre lesquelles on n'a qu'un choix limité.

On a rarement cherché à donner la définition du mot *dimension* (2). M. Ueberweg le définit à peu près comme nous :

« On nomme *dimension*, dit-il, la génération d'une série d'éléments hors d'un élément, par une position répétée un nombre fini ou infini de fois de cet élément.

» Une *série* est une suite d'éléments procédant suivant une certaine loi. »

De là, continue-t-il, la proposition : *l'espace a trois dimensions*.

(1) On a coutume de dire que la plus grande dimension est la longueur, et la plus petite la hauteur, ou épaisseur, ou encore profondeur. De plus, on dit quelquefois que la surface n'a que deux dimensions, la longueur et la largeur. Il faut remarquer cependant que, même en parlant géométrie, on dit toujours la *hauteur* d'un triangle ou d'un rectangle, et qu'on ne parle pas de la *longueur* de ces figures, mais de leur *base*.

(2) Le dictionnaire de l'Académie dit que c'est l'*étendue des corps*.



Ces définitions ne laissent pas cependant de prêter à la critique. Ainsi, la dimension n'est pas une *génération*, mais une ligne; la position répétée un nombre *fini* de fois d'un élément, n'engendre pas une dimension; enfin, la série est produite suivant une *loi*, tandis que l'idée de loi n'entre pour rien dans celle de dimension.

D'ailleurs, il est assez difficile de déduire rigoureusement de cette définition la proposition que *l'espace a trois dimensions*; on en déduirait plutôt celle-ci : *l'espace a une infinité de dimensions*.

Quant à notre définition, outre qu'elle est d'accord avec l'étymologie, elle rend fidèlement, croyons-nous, l'idée vulgaire qu'on se fait des dimensions. Quand on évalue une surface, un terrain par exemple, on trace une certaine ligne arbitraire qui sert à mesurer sa *longueur*; puis, en tant que l'esprit se reporte sur la *largeur*, il fait mouvoir cette même ligne suivant une trajectoire arbitraire, qui sert à donner la mesure de la seconde dimension.

§ 4.— DE L'INFINITÉ DE L'ESPACE, DU POINT, ET DES ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES.

Nous sommes ici au cœur de toutes les contradictions qu'entraînent ces notions premières, conditions de toute pensée philosophique ou scientifique.

Ce que nous cherchons dans ce travail, ce n'est pas proprement, soit à les résoudre effectivement, soit à les déclarer insolubles, ce qui coupe court à toute discussion, nous voulons seulement chercher à préciser, autant que possible, les termes employés, et à trouver l'essence fondamentale des choses qu'ils expriment.

Nous avons déjà accompli une partie de cette tâche par nos définitions de l'homogénéité, de l'isogénéité

et de la continuité. Il nous reste à parler de l'infini, du point, et des éléments en général.

La continuité exclut toute détermination; car qui dit détermination, dit par là même solution de continuité. C'est cette première contradiction qui a été l'occasion de ces discussions interminables sur le point, la ligne et la surface : le point est-il une partie de la ligne? etc. La preuve toute géométrique que nous avons donnée plus haut de la non-présence d'espace dans la surface, de surface dans la ligne, etc., doit nous suffire; c'est le premier pas dans le domaine de la géométrie, quand on sort de celui de la philosophie.

Niez toute détermination, l'espace apparaît comme *infiniment grand*. L'infini mathématique est donc une négation de détermination, c'est *l'indéterminé*, ce terme étant pris dans son sens étymologique de *non déterminé*, et non pas dans le sens de *quelconque*, de *ceci ou cela*. L'infiniment grand est une *grandeur sans forme*; la grandeur y a absorbé la forme, on ne peut s'en faire une *image*. Il y a donc absurdité à se demander combien il y a de choses finies dans l'infini, combien il faut de formes pour arriver à la négation de la forme, où il faut placer la limite pour atteindre l'illimité. C'est pourquoi de l'espace infini on peut affirmer toutes les formes, parce qu'on les détruit en les appliquant à une grandeur sans limite. Ainsi, on peut dire de l'espace infini que c'est une sphère dont le rayon est infini; un cube dont les côtés sont infinis; un tétraèdre dont l'apothème est infini, etc.

D'un autre côté, l'absolument déterminé, ce qui n'a de détermination que lui-même, c'est, dans l'espace, le *point mathématique*, *c'est une forme sans grandeur*; celle-ci y est absorbée par celle-là. Cette

notion coupe court à toutes les questions que le point a fait naître. On peut donc affirmer du point toutes les formes dont on nie la grandeur; c'est une sphère dont le rayon est nul, un cube dont le côté est nul, un tétraèdre dont l'apothème est nul, etc.; et la définition donnée par l'analyse $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=o$, n'est autre chose que la première.

Le point est donc ce qui sert de *limite* par excellence; de sa nature il n'est que *limite* ; et par là se justifient et s'expliquent en partie la plupart des définitions qu'on en a données (1).

1. Le point est ce qui n'a aucune partie (Euclide).

2. Punctum est, quod quaquaversum seipsum terminat, sed quod non habet terminos a se distinctos (Christ. Wolff).

3. On nomme point toute place déterminée dans l'espace, lorsqu'on veut la désigner comme telle (Bretschneider) (2).

4. Le point est la limite de la ligne (Staudt). — Les extrémités d'une ligne se nomment points (Legendre).

5. Le point est le lieu où deux lignes se coupent (Blanchet).

6. Le point est ce qui n'a aucune dimension (Kunze).

1° La définition d'Euclide est purement négative, et beaucoup trop large puisqu'elle s'applique aussi bien au moment, à l'intelligence, à l'âme, à la vie, etc.

2° La définition de Wolff rentre dans la nôtre; mais elle manque de clarté, et l'on ne voit pas en quoi elle ne

---

(1) Ce qui va suivre est en grande partie tiré d'un travail de M. Fechner (Journal de Fichte, 1858, 2e cahier, page 160, *Ueber den Punct.*)

(2) Jede bestimmte Stelle in dem Raume, wenn sie als solche bezeichnet werden soll, wird ein Punkt genannt.

s'appliquerait pas au cercle ou à toute autre figure fermée.

3° Cette définition est tautologique; car on ne peut fixer une place dans l'espace que comme un point déterminé. Cette définition rentre aussi en partie dans la nôtre, qu'on pourrait traduire comme suit :

Le point est ce qui est déterminé par soi-même.

4° Le point est partout dans la ligne, et non seulement à ses extrémités (1). C'est ce que prouve la définition 5.

5° Celle-ci serait meilleure si l'on disait : *où deux lignes peuvent se couper;* car le point est sur les lignes là même où elles ne se coupent pas. Quand une ligne coupe une surface, l'intersection n'est-elle pas un point? Quand deux lignes se touchent en un point sans se couper, deux cercles tangents, par exemple; quand deux surfaces, deux sphères se touchent, n'est-ce pas encore en un point? Enfin, comment faire rentrer dans cette définition, ainsi que dans la précédente, le centre d'une sphère ou d'un cercle, les foyers d'une section conique, etc.?

6° Cette définition a les mêmes inconvénients que celle d'Euclide.

Nous aurions encore à citer la définition de M. Ueberweg : *Le point est l'élément simple de l'espace;* mais la critique en sera mieux à sa place quand nous aurons parlé des éléments. Pour le moment, nous nous bornerons à demander ce que c'est que la *simplicité?* Il ne serait pas facile d'en donner une autre définition que celle d'Euclide ou de Kunze (2).

(1) « C'est comme si l'on définissait, dit M. Fechner, la *cellule,* une utricule à l'extrémité d'une plante. »

(2) Nous faisons remarquer que la définition que nous avons donnée du point, quand nous avons déduit les notions de surface

Il est temps que nous précisions le sens de ce terme *élément*, dont nous avons fait usage en maint endroit sans le définir (1).

On entend par *élément d'un corps, la plus petite partie de ce corps qui puisse en exprimer la nature;* c'est le corps réduit à son minimum; de sorte que l'élément permet de remonter au corps entier. Ainsi l'élément de l'eau, c'est la partie d'eau la plus petite possible, une molécule d'eau (2); l'élément du nitrate de potasse, c'est une molécule de nitrate de potasse; *molécules qui renferment toutes les propriétés de l'eau, toutes les propriétés du nitrate de potasse.* Il ne faut pas confondre les éléments d'un corps avec les parties élémentaires (les parties de l'élément), les parties constitutives de ce corps, qui sont : pour l'eau, l'oxygène et l'hydrogène; pour le salpêtre, l'acide nitrique, et la potasse; et pour ceux-ci, l'oxygène, l'azote et le potassium. L'oxygène, l'hydrogène, l'azote, etc., ne sont regardés comme

---

et de ligne, rentre en quelque sorte dans celles de Legendre et de Staudt, mais n'est pas sujette au même reproche, puisque nous considérons la ligne comme indéfinie, et le point comme la séparation entre la ligne négative et la ligne positive; ce qui est le mettre partout dans la ligne. Quant à la seconde définition, elle n'est pas géométrique, mais purement philosophique; elle est placée en regard de celle de l'*infiniment grand*, et montre le point comme le résultat de l'abstraction de la grandeur, de même que l'infiniment grand est le résultat de l'abstraction de la forme. Mais toutes deux confirment notre postulat premier de la grandeur et de la forme et de leur union indépendante dans la figure.

(1) Le dictionnaire de l'Académie ne s'explique pas là-dessus; il parle des *quatre éléments* des anciens, des *éléments* ou *corps simples* de la chimie, des *éléments du langage*, etc.; mais les *éléments*, les parties constitutives d'une chose, il ne les connaît pas.

(2) Au mot *molécule*, qu'il définit *une petite partie*, le dictionnaire de l'Académie parle de *molécules élémentaires*.

éléments, que si l'on considère le corps chimique en général, de sorte que les éléments d'un corps se trouvent eux-mêmes composés d'autres éléments, et ainsi de suite. Mais alors le terme d'*éléments* est pris dans un sens différent, que nous venons d'indiquer, celui de *parties simples ou élémentaires*.

C'est donc à tort que l'on fait quelquefois du point l'élément de l'étendue. La négation de l'étendue ne peut nous donner la représentation en petit de l'étendue; avec la négation de l'étendue on ne peut produire l'étendue. Confondre le point avec l'élément, c'est se mettre en contradiction avec l'idée même d'élément.

Appliquons maintenant cette théorie aux figures de la géométrie. L'élément d'une figure, c'est donc la plus petite partie de cette figure qui puisse nous donner l'idée de la figure entière. L'élément de la droite sera deux points consécutifs; l'élément du cercle, trois points; l'élément de la parabole, quatre points, etc. En effet, ces deux points, ces trois points, ces quatre points étant donnés, on peut construire la figure entière à laquelle ils appartiennent. Il suit de là que l'élément d'une ligne droite se trouve être une partie constitutive de l'élément d'un cercle, d'une parabole, d'une ellipse; que l'élément d'un cercle se trouve être impliqué dans l'élément de la parabole, de l'ellipse, etc. Cette remarque nous conduit immédiatement à la théorie des contacts, des tangentes, des cercles osculateurs, des paraboles osculatrices, etc. Si l'élément d'une ligne est une partie constitutive de l'élément d'une autre ligne, la première est dite *osculatrice* par rapport à la seconde; si cette première est une droite, on a la *tangente;* si c'est un cercle, le *cercle osculateur;* si c'est une parabole, la *parabole osculatrice*, etc.

Nous sommes ainsi ramenés à notre classification des figures, et les deux théories se confirment l'une l'autre. Nous avons en outre ici les *unités de forme* dont nous avons parlé plus haut.

En effet, qu'est-ce, par exemple, qu'un cercle osculateur? C'est un cercle mesure auquel se rapporte la forme d'une courbe donnée autour d'un point; il en est de même de la parabole osculatrice, et de la tangente. La tangente est la plus simple mesure des formes; par la tangente, on apprécie la forme de la courbe autour de ce qu'on appelle le *point de contact*, qui est proprement l'*élément de contact*, c'est-à-dire deux points. C'est ce qui explique l'importance des tangentes et des normales en géométrie, et celle des courbes osculatrices en géométrie analytique. On voit également par là pourquoi le dessinateur qui met une courbe en perspective, se contente de prendre la perspective d'un certain nombre de tangentes à cette courbe (1).

Ainsi donc, nous pouvons aussi considérer une

(1) C'est un tort des livres élémentaires sur la géométrie, de ne pas donner quelques explications sur l'introduction de termes et de figures tels que les tangentes. L'élève est tenté de regarder celles-ci comme de simples curiosités, et de mener par analogie des cercles tangents à des courbes, cercles qui ne sont d'aucune utilité en géométrie. Nous voudrions aussi qu'au lieu de la définition ordinaire de la tangente, *une droite qui n'a qu'un point de commun avec une courbe*, on introduisît enfin la définition réelle, *la tangente est une sécante qui passe par deux points consécutifs* En effet, outre qu'elle est la seule possible en géométrie analytique et en calcul différentiel, elle a l'avantage de rendre raison de ce fait, que la tangente est toute déterminée de position, ce qui est inexplicable au cas où elle n'aurait qu'un point de commun avec la courbe; car par un point on peut faire passer une infinité de droites. Quant aux théorèmes élémentaires sur les tangentes, ils se démontrent avec la même facilité.

courbe comme composée d'éléments de droites, *d'éléments de cercles*, *de paraboles*, etc., suivant la nature de son propre élément; dans tous les cas, on peut la considérer comme composée d'éléments de droites. C'est ainsi que l'oxygène fait partie de l'élément de l'acide nitrique; l'acide nitrique, de l'élément du nitrate de potasse; et ainsi de suite. Enfin, considération qui nous a été utile dans la classification des figures, l'oxygène est plus *simple* que l'acide nitrique, parce que les éléments du premier ne sont que des parties des éléments du second; et pour la même raison, l'acide nitrique est plus *simple* que le nitrate de potasse. Nous pouvons dire, par conséquent, que la ligne droite est plus *simple* que le cercle et que toute autre courbe, parce que son élément entre comme élément constitutif dans celui du cercle, et dans celui d'une courbe quelconque; que le cercle est plus *simple* que la parabole, celle-ci que l'ellipse, etc. Enfin, pour en finir avec les analogies, ces considérations sont d'un usage journalier en astronomie, où l'on ne peut souvent qu'observer une partie du chemin des astres — ce qui est le cas pour les comètes — et, de cette partie, conclure la forme de la trajectoire. Les unités de forme y trouvent aussi leur emploi: tout le monde sait que l'on considère comme parabolique la trajectoire de la comète dans la partie qui nous est visible, ce qui revient à substituer une forme plus simple à une autre plus compliquée; souvent aussi on regarde la trajectoire des planètes comme circulaire, et dans d'autres cas, quand il s'agit d'espaces de temps très-courts, comme rectiligne.

Il est inutile, croyons-nous, d'étendre la théorie des éléments aux courbes à double courbure et aux sur-

faces; cela n'offrirait plus d'intérêt. Quant à l'antinomie inhérente à l'idée de deux points consécutifs, elle est née avec l'idée de continuité, c'est-à-dire qu'elle est aussi vieille que l'esprit humain. Pascal l'a développée avec beaucoup de force dans ses *Pensées sur la géométrie en général*. C'est là qu'il montre que deux indivisibles (deux points, d'après la définition d'Euclide) ne peuvent se toucher sans se confondre, ou sans cesser d'être indivisibles. L'élément est une limite fictive que notre esprit imagine pour s'y reposer, de même qu'il imagine des unités de longueur, de surface, de volume, de temps, de force, etc. Si nous considérons une ligne droite, ou une ligne quelconque, nous la voyons ne pas cesser d'être ligne, quelque petite qu'elle soit ; c'est une conséquence immédiate de l'homogénéité de l'espace. La petite ligne est aussi bien ligne que la grande, et il y a en elle autant de déterminations possibles que dans celle-ci. Si pourtant nous prenons la ligne à un instant donné pour terme de comparaison, nous pouvons dire qu'elle devient *plus grande*, ou *plus petite*. De même que nous prenons une ligne arbitraire pour *point de départ* de notre procès, nous imaginons un *point d'arrivée*, qui, dans un sens, est l'infiniment grand (1), dans l'autre sens, l'élément. Le procès est à sa fin quand nous avons obtenu une grandeur qui ne peut plus être augmentée, ce qui implique une absurdité ; ou une grandeur qui ne peut plus être diminuée, autre absurdité. D'un côté, comme nous l'avons dit, nous supprimons la *forme* ; de l'autre, la *grandeur*.

(1) Toute courbe fermée peut et doit être en effet considérée comme revenant indéfiniment sur elle-même. Le cercle est une spirale dont le pas est nul.

Mais ici — et c'est l'erreur de M. Ueberweg quand il croit obtenir le point par la division à l'infini, par la considération des termes d'une série en progression décroissante — nous ne détruisons que le contenu, tout en conservant la forme ; nous nous arrêtons à la limite où la forme va disparaître ; nous conservons la détermination elle-même — les deux points avec un contenu nul pour la ligne droite. Quand, avec M. Ueberweg, on réduit l'élément au point unique, on est en face de cette difficulté qu'on ne peut plus lever, celle de reproduire la droite. En effet, si par un procès continu on a ramené la droite à sa plus petite valeur, à son élément, on doit pouvoir, par le procès inverse, partant de cette plus petite valeur, revenir à la ligne primitive. Or c'est ce qui devient impossible quand on n'a plus qu'un point, car par un point peuvent passer une infinité de droites autres que celle qui l'a fourni. Enfin, en réduisant tous les éléments à des points, il est impossible de parler encore d'éléments, dans le vrai sens du mot.

LIVRE III.

—

CRITIQUE GÉNÉRALE ET SOLUTIONS.

Ce livre est le couronnement de la tâche que nous avons entreprise. Nous avons à y faire voir que l'existence de propositions indémontrées au seuil de la géométrie, telle qu'on l'enseigne aujourd'hui, provient de la non-application des principes déduits plus haut — ce sera l'objet du premier chapitre — et, en outre, à édifier sur sa nouvelle base la géométrie future — ce sera la matière du second chapitre. La solution de ce double problème est, croyons-nous, le criterium le plus sûr de la théorie philosophique qui nous y a conduit.

CHAPITRE Ier.

DES ANCIENS POSTULATS DE LA GÉOMÉTRIE.

Ce chapitre comprendra deux paragraphes : dans le premier, nous rechercherons la nature précise du postulat ; dans le second, nous ferons l'énumération méthodique des propositions jusqu'ici indémontrées.

§ 1er — ORIGINE DES ANCIENS POSTULATS DE LA GÉOMÉTRIE.

« Un principe quelconque de la géométrie pure, dit Kant, n'est pas plus analytique qu'un principe arithmétique. La proposition : *entre deux points la ligne droite est la plus courte possible*, est une proposition synthétique. *Car mon concept de droit ne renferme rien de relatif à la quantité*, *mais seulement une qualité*. Le concept de *plus court* est donc complètement ajouté, et ne peut être dérivé par aucune analyse du concept de ligne droite. On a donc ici besoin de l'intuition comme de l'unique moyen de rendre la synthèse possible (1). »

Hegel combat cette opinion de Kant : « On peut remarquer en passant, dit-il, l'étrange bizarrerie de Kant de soutenir que la définition de la ligne droite

(1) *Critique de la raison pure*. Introduction ; trad. de Tissot.

(*le plus court chemin entre deux points*) est une proposition synthétique, en ce que mon idée de *droit* ne renferme rien de relatif à la grandeur, mais seulement à la qualité. En ce sens, toute définition est une proposition synthétique. Le *défini*, la *ligne droite*, est d'abord une intuition ou représentation, et la détermination qu'*elle est le plus court chemin entre deux points*, produit le *concept*..... Ce qui fait la différence du concept et de l'intuition, c'est que l'un n'est pas dans l'autre, et c'est pourquoi une définition est nécessaire. Il est clair à l'évidence que cette définition est analytique : la ligne droite se laisse ramener à la simplicité de direction; or, la simplicité prise en rapport avec la quantité (*Menge*) donne la détermination de *plus petite quantité*, et ici, celle de *plus court chemin*. »

On pourrait renvoyer à Hegel l'expression inconvenante dont il se sert à l'égard de Kant. Qu'est-ce que cette simplicité, qui, d'abord prise par rapport à la direction, l'est ensuite par rapport à la quantité, et qui devient le plus court chemin? En admettant que cela soit vrai, et que la simplicité de direction se laisse ramener à celle de plus court chemin, comment Hegel a-t-il pu soutenir que cette transformation était analytique, dans le sens que Kant attribuait à ce mot? Trouver que la simplicité de direction est intimement liée à celle de plus court chemin, n'est-ce pas ajouter à l'idée de direction quelque chose qu'elle ne comprenait pas d'abord, faire un jugement synthétique dans le sens kantien?

Toutefois, voici comment s'exprime à ce sujet un philosophe de l'école de Hegel, M. Frantz, qui a appliqué

(1) *Naturphilosophie*. § 256.

aux mathématiques en particulier la logique de son maître :

« En réalité, les objets de la mathématique, quoique déterminés par les catégories les plus simples, ne sont pas purement simples; ils contiennent une pluralité de déterminations, et doivent en être considérés comme l'unité. De là vient l'incertitude de savoir quel caractère doit servir de définition. Ainsi, pour Euclide, *la ligne droite est celle qui est située semblablement entre ses points;* pour Legendre, au contraire, *c'est le plus court chemin entre deux points.* Ces deux déterminations sont différentes, mais chacune d'elles détermine la droite.

» La définition donc, au contraire du concept, ne donne pas, en général, tout le contenu de la chose. Par suite, pour pouvoir, au moyen de la définition, aller plus loin, tous les moments (de l'évolution de l'idée) sont nécessaires; et là est l'origine des axiomes. On ne peut donc pas rechercher ici un fondement à l'axiome, car il est clair en soi, et c'est, en quelque sorte, un fait de la conscience. »

Vient ici l'énumération des cinq axiomes ordinaires de la géométrie. Arrivé au quatrième : *une ligne droite est le plus court chemin entre deux points*; ou, dans le cas où cette proposition constituerait la définition de la droite : *deux lignes droites ne renferment aucun espace*, M. Frantz dit :

« La ligne droite est déterminée qualitativement — *droite* — et en même temps elle est une grandeur — une *longueur*. Comme l'espace même est grandeur, ses propriétés qualitatives sont simplement de grandeur. La ligne droite est donc en même temps grandeur et qualité. Cet *en même temps*, l'entendement ne peut le saisir, il laisse l'une en dehors de l'autre. Par la défi-

nition, la ligne droite ne peut être déterminée que suivant l'*une* de ses déterminations; c'est pourquoi la *seconde* doit être posée comme proposition fondamentale. La définition contient-elle, comme chez Euclide, seulement le moment qualitatif de la ligne droite, alors l'axiome doit être qu'elle est le plus court chemin. — Cette proposition est indispensable; c'est là-dessus que repose la rectification du cercle, dont Euclide ne donne pas, il est vrai, la théorie. Quand il ajoute comme axiome que deux lignes droites ne peuvent renfermer d'espace, il commet tout simplement une erreur; car ce n'est là que le moment qualitatif, et on peut le déduire très-simplement de la définition. — La ligne droite est déterminée qualitativement quand elle l'est quantitativement, sa qualité est quantité, sa quantité est qualité. Comme grandeur en général, elle n'a ni cette grandeur-ci ni cette grandeur-là, mais *la* grandeur, qui la distingue de toutes les lignes, car c'est précisément sa qualité. La simplicité de sa direction n'est donc rien autre chose que l'expression de son expansion comme grandeur (*als eine Concentration ihres Aussereinanders, das sie als Grösse ist*); son expansion, sa grandeur, est en même temps réduite au minimum — la ligne droite est le plus court chemin entre deux points. Legendre, qui accepte cette proposition comme définition, pose avec raison le moment qualitatif dans l'axiome : *d'un point à un autre on ne peut tirer qu'une seule ligne droite*. Il est clair que cette proposition n'est que la définition d'Euclide sous forme apagogique. Si l'on pouvait tirer entre deux points plusieurs lignes droites, celles-ci ne seraient pas placées semblablement entre tous leurs points : deux points de l'une d'elles appartiendraient à une autre, pendant que celle-là serait placée en tous ses

autres points en dehors de cette seconde ligne et par conséquent, autrement. » (1)

Quoi qu'il en soit de cette dernière démonstration, ce passage peut se résumer facilement en cette proposition : La ligne droite est déterminée qualitativement aussi bien que quantitativement ; et l'une des déterminations emporte l'autre. Sa détermination qualitative, c'est la *constance de sa direction* (si toutefois c'est là ce que signifie la définition d'Euclide) ; sa détermination quantitative, c'est celle de *plus court chemin* ; prenez pour définition l'une ou l'autre de ces propriétés, le sujet *droite*, défini par l'une, aura *nécessairement* pour attribut l'autre ; et l'on peut dire en axiome : la ligne droite *(simplicité de qualité)* est le plus court chemin (*simplicité de quantité*) ; ou bien : il n'y a qu'un plus court chemin entre deux points quelconques *(simplicité de qualité)* d'une droite *(simplicité de quantité)*. Admettant même que la simplicité de qualité soit la constance de direction, que la simplicité de quantité soit la longueur minimum — ce qui ne laisse pas de supposer en nous une grande dose de foi — en sera-t-on, en réalité, plus convaincu de la *nécessité* de la liaison de ces deux attributs, *liaison que l'entendement ne peut saisir?* On cherche à prouver l'axiome par cette *nécessité*, et c'est celle-ci qui forme l'essence de l'axiome. C'est tellement vrai que l'on sera toujours plus disposé à admettre l'axiome géométrique : *la ligne droite est le plus court chemin entre deux points*, que la proposition Hegélienne : *la simplicité de qualité est intimement liée à la simplicité de quantité, parce que, dans les mathématiques, la qualité c'est la quantité.*

(1) *Die Philosophie der Mathematik* : Leipzig, 1842, p. 95 et suiv.

Mais Hegel a fait une remarque importante — qui donnait même raison à Kant, s'il y avait fait attention — c'est que la *ligne droite* (et nous pouvons ajouter, le *plan*) est d'abord une *intuition* ou *représentation*. Quand on dit : *la ligne droite est le plus court chemin*, il n'y a pas là une *définition*, une équation exacte entre deux membres, il y a une *proposition* sur la ligne droite : le sujet (ligne droite) est quelque chose de connu, une intuition, et *le plus court chemin* est une propriété que l'on affirme de cette intuition. Aussi l'idée de *droit*, en tant que *le plus court chemin*, n'est pas proprement un concept dans le sens exact du mot, puisque *le plus court chemin* ne forme pas toute sa compréhension. Pour que *droit* devienne un concept, il faut que l'on puisse en donner l'*essence* ; il faut qu'il y ait identité pour l'entendement entre l'intuition primitive de *ligne droite* et l'attribut que l'on en affirmera. Cette identité obtenue, on pourra regarder cet attribut comme définissant l'intuition, on aura remplacé l'*intuition* par un *concept;* l'édification de la théorie sera possible. Or, quand on n'a pas saisi le caractère *distinctif* d'une figure, son *essence*, qu'on ne l'a aperçue que sous une certaine face, qu'on n'en a vu qu'une propriété plus ou moins saillante, comme c'est, en définitive, cette *essence* qui est la raison dernière de l'ensemble des propriétés, il est impossible de passer de l'une de celles-ci à l'autre par voie de raisonnement, car elles sont coordonnées et non subordonnées. Ainsi, la ligne droite est, en vertu de son essence jusqu'ici restée dans l'ombre, à la fois *le plus court chemin*, c'est-à-dire, une mesure pour la distance; *une ligne de direction constante*, ou une mesure pour la direction; *une ligne déterminée par deux de ses points*, ou qui ne sort pas d'elle-même dans

sa rotation autour de ses deux extrémités; ***une ligne dont tous les points sont semblablement placés*** (1); mais c'est cette ***essence*** qui est la raison de chacune de ces propriétés, et non l'une d'entre elles (2),

---

(1) C'est ainsi encore qu'en géométrie analytique, la définition de la droite $y = ax + b$, n'est que la traduction de cette propriété, que *deux triangles rectilignes semblables* ABC *et* ADE *ont les angles égaux, et sont en partie superposables*. Deux figures triangulaires ne jouissent de cette propriété, que si leurs côtés sont des droites.

(2) Nous transcrivons ici une page de M. Noël (ouvrage cité), où cette coordination des propriétés frappe les yeux, bien que l'auteur ait cherché à les subordonner les unes aux autres:

« On appelle *ligne droite* ou simplement *droite*, le plus court chemin d'un point à un autre : un cheveu bien tendu donne l'idée d'une ligne droite.

On peut encore (?) concevoir la ligne droite, comme engendrée par le mouvement d'un point, qui tend constamment vers un même point *fixe*; car il est évident (?) que le chemin décrit sera le plus court, depuis le point de départ jusqu'à celui d'arrivée. D'ailleurs, ce plus court chemin est *unique* (?), vu que le point générateur ne s'est détourné aucunement de sa *direction* ou *tendance* primitive (?) vers le point fixe, et qu'il ne peut y avoir deux tendances à la fois (?).

Il est évident et l'on doit admettre comme axiome fondamental, que *d'un point à un autre il n'y a qu'une seule ligne droite*, c'est-à-dire qu'un seul plus court chemin. Ce chemin le plus court est donc (?) la *vraie distance* du premier point au second. De sorte que deux droites coïncident entièrement l'une avec l'autre, dès qu'elles ont les mêmes extrémités; et l'une d'elles ne saurait être plus droite que l'autre.

Une droite donnée de longueur n'a évidemment qu'un seul *milieu*, etc.

Théor. *Deux droites qui ont deux points communs coïncident l'une avec l'autre dans toute leur étendue infinie et ne font qu'une seule et même droite.*

(La démonstration sera citée plus bas).

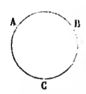
Corol. La droite AC ne saurait avoir deux prolongements différents au-delà de chacune de ses extrémités, bien qu'elle puisse être prolongée à l'infini dans les deux sens opposés. De sorte que, *par*

Admettez comme définition de la ligne droite, soit la première, soit la dernière, force vous est d'accepter les autres, explicitement ou implicitement, sous le nom de *postulats* ou d'*axiomes*. Mais au fond ces prétendus axiomes sont des théorèmes, des jugements *synthétiques*, qui réclament impérieusement une démonstration, et qui ne seront jamais démontrés tant qu'on ne sortira pas de l'ornière ancienne (1). Or, tout théorème, toute *synthétisation* du concept, est une décomposition, une *analyse* de la figure, de l'intuition; et si l'on se reporte à ce que nous avons dit des figures composées, on verra que cette analyse de la figure, est, au fond, la formation d'une figure composée. Quand je dis, par exemple, que, *dans le cercle, les arcs sont proportionnels aux angles au centre*, qu'est-ce autre chose que distinguer sur le cercle des

---

deux points donnés on ne peut faire passer qu'une ligne droite. Par conséquent, deux points suffisent pour déterminer la position d'une droite dans l'espace. Il est clair aussi que *deux droites ne peuvent se couper qu'en un seul point*; car si elles se coupaient en deux points, elles auraient ces deux points communs et coïncideraient l'une avec l'autre, ce qui est contre l'hypothèse. »

(1) Pascal (Pensées, *Réflexions sur la Géométrie*) est donc tombé dans une grande erreur, quand il a dit : « On ne reconnaît, en géométrie, que les seules définitions que les logiciens appellent *définitions de nom*, c'est-à-dire que les seules impositions de nom aux choses que l'on a clairement désignées en termes parfaitement connus. » Le plan et la droite, ne sont pas, en ce sens, susceptibles de définitions nominales; la difficulté pour le plan et la droite n'est pas de donner un nom à la chose, c'est de *désigner* cette chose. « Leur utilité et leur usage (des définitions de nom), continue-t-il, est d'éclaircir et d'abréger le discours, en exprimant, par le seul nom qu'on impose, ce qui ne pourrait se dire qu'en plusieurs termes. » Sans doute; mais dans le cas qui nous occupe, ce sont *ces plusieurs termes* qui manquent, et qu'il faut trouver.



points arbitraires A, B, C, et établir un rapport entre les arcs qui les lient? Quand j'affirme que, *dans un triangle, un côté est plus petit que la somme des deux autres*, n'est-ce pas y distinguer un côté, l'opposer aux deux autres, et le leur comparer?

De même, quand je dis : *la ligne droite est le plus court chemin entre deux de ses points*, n'ai-je pas analysé, c'est-à-dire composé une figure? N'ai-je pas, en réalité, pris sur la droite AB deux points C et D que j'y dessine, pour ainsi dire? Et comparant la partie quelconque CD avec toute autre ligne que je pouvais tirer entre les points C et D, n'ai-je pas trouvé que la dernière surpassait la première en quantité? Pour affirmer que les parties de la droite sont superposables si elles sont de même longueur, que je puis faire glisser CD sur AB, ne dois-je pas avoir, sur cette droite, tracé des points, composé une nouvelle figure, comme dans le cas cité où le cercle servait d'exemple? N'est-ce pas un théorème, dont j'ai à prouver l'inverse et la réciproque, si je veux faire servir en définition la propriété qu'il énonce, si, en d'autres termes, je veux être sûr qu'il exprime l'*essence* de la droite, et non une *essence* plus générale? Mais si, par *intuition*, je vois qu'il exprime cette *essence*, dont je ne possède pas le *concept*, comme alors la démonstration m'en échappe, vu que c'est ce *concept* qui en est le principe, *j'admets sous forme de postulat l'inverse du théorème ou un autre théorème d'où je puisse tirer cette inverse.*

Nous avons vu, dans le livre précédent, que la définition doit être *génétique*; c'est en effet la seule manière possible de traduire par une *intuition* un *concept*, et réciproquement. Nous avons fait remarquer alors

que la définition ordinaire de la droite, entre autres, n'est pas dans ce cas (1); elle ne nous donne, en effet, aucun moyen de tracer une droite entre deux points donnés. Nous avons donc à rechercher quelle est cette *essence* fondamentale de la droite et du plan. Il y a cependant une différence entre cette essence que nous cherchons, et celle des autres figures de la géométrie: c'est que dans celles-ci, l'intuition succède au concept, tandis que la droite et le plan sont des intuitions primitives qui précèdent le concept. Ce ne sont pas des figures arbitraires que je trace dans l'espace, et auxquelles je donne un nom, figures qui n'existent pas avant que je les aie engendrées, mais des déterminations inhérentes à l'idée même de l'espace; ce sont des figures toutes tracées d'avance, comme les orbites des planètes, et je ne puis que rechercher comment on pourrait les engendrer. Mais quel que soit le mode de génération que j'imagine, que je fasse, par exemple, mouvoir une droite parallèlement à elle-même sur une autre droite, pour engendrer le plan; que je suppose un point tendant constamment vers un point fixe, ou conservant la même direction, pour engendrer la droite; les modes de génération sont plus compliqués que la chose elle-même, et impliquent déjà cette chose.

Ces déterminations sont données avec l'espace lui-même, disons-nous. En effet, comment engendrons-nous l'espace? Nous prenons le plus petit espace possible, ce qui ne peut pas devenir moindre, la limite

(1) Il est remarquable qu'on n'ait jamais songé à définir le *plan*: *la plus petite des surfaces qu'on puisse appuyer sur deux droites qui se coupent.* Cette définition serait pourtant la seule en harmonie avec celle de la droite.

extrême de la contraction de l'espace; puis, par le procès inverse, nous dilatons, nous amplifions cet espace. Or, les déterminations de cet espace élémentaire, c'est-à-dire les surfaces élémentaires, les lignes élémentaires qu'il renferme, se dilatent avec lui, par la même loi que lui, homogénéiquement, et deviennent des plans et des droites. De là, les définitions suivantes :

Le plan est une surface homogène;

La droite est une ligne homogène;

c'est-à-dire qu'une portion de plan, *majorée*, engendre le même plan; qu'une portion de droite, *majorée*, reproduit la droite.

Nous pouvons donc regarder l'homogénéité comme étant le caractère *génétique* de l'espace, du plan, de la droite. L'espace, le plan, la droite, sont des déterminations qui s'*engendrent* d'une façon homogène. Qu'on prenne un solide, une surface, une ligne au moment où ils naissent, et que l'on continue leur mode de génération, le solide deviendra l'espace infini; la surface, le plan infini; la ligne, la droite infinie.

Nos définitions de la droite et du plan sont devenues, grâce à la découverte de leur essence, de leur mode de génération, des définitions nominales et inversibles. Nous appelons *ligne droite*, une ligne homogène; *plan*, une surface homogène; et nous savons ce que nous entendons par là; nous savons comment on engendre une pareille ligne, une pareille surface. Et l'idée de cette ligne homogène, l'idée de cette surface homogène, coïncident parfaitement avec ces intuitions primitives, ces déterminations qui nous sont données avec l'intuition de l'espace; de manière que nous sommes arrivés à une véritable équation entre cette intuition et le concept; nous avons *nominalisé* la définition.

Nous sommes maintenant à l'égard de la droite et du plan dans la position où nous nous trouvions à l'égard du cercle, lorsque de *nom* il était devenu *chose;* c'est-à-dire que nous n'aurons pas le droit d'*intervertir* les théorèmes, ou les propriétés de la droite et du plan, sans une démonstration préalable. Après avoir démontré que la droite est le plus court chemin entre deux points, nous ne pourrons pas dire sans démonstration : le plus court chemin entre deux points est nécessairement la droite; pas plus que, après avoir prouvé que la droite est composée de parties égales et peut glisser sur elle-même, il ne nous serait permis de dire par inversion : toute ligne composée de parties égales, ou qui peut glisser sur elle-même, es une droite — ce qui serait faux, puisque le cercle est dans ce cas.

Maintenant que nous possédons les définitions de la droite et du plan, celles de la ligne courbe et de la surface courbe n'offrent plus de difficultés.

La surface courbe est une surface non homogène;

La ligne courbe est une ligne non homogène.

Ces définitions, négatives dans la forme, ne le sont pas en réalité. On n'est pas le moins du monde embarrassé pour tracer une courbe, une ligne *non homogène*; la première venue remplira certainement cette condition, en vertu même de la non-homogénéité réelle de l'espace et du temps. L'instrument qui trace la ligne, et la surface sur laquelle on la trace, varient à chaque instant et à chaque place, de nature, de propriété, de direction. L'espace, le plan et la droite, au contraire, sont, en tant qu'homogènes, des déterminations tout idéales, purs produits de la pensée, et par cela même, formes immuables, typiques, mesures par excellence.

Il est inutile que nous nous arrêtions à critiquer la définition ordinaire de la ligne courbe : *une ligne qui n'est ni droite ni composée de lignes droites*, définition « qui se borne, dit M. Lamarle, à énoncer deux négations qui ne peuvent mener à rien, et qui n'ont aucun rapport avec la *nature intime* de la courbe. » Des deux définitions que donne M. Lamarle, la suivante est seule irréprochable au point de vue géométrique :

La courbe est la trace d'un point qui se meut sur une droite mobile, le point glissant sur la droite, et la droite tournant autour du point.

Quant à l'autre définition : *La courbe est la trace d'un point qui se meut suivant une direction incessamment variable*, elle comprend le terme, non encore défini convenablement, de *direction*; mais elle est acceptable de tout point, si l'on admet que la droite est la ligne de direction constante.

Pour ce qui regarde la *ligne brisée*, c'est-à-dire la ligne composée de lignes droites, ce n'est pas une ligne simple, mais une *ligne composée*, une figure. D'ailleurs, la géométrie ne s'en occupe que sous le nom de *polygone*, ou de *périmètre*, et non sous celui de *ligne brisée*, qui est superflu en tête des éléments.

§ 2. — ÉNUMÉRATION DES ANCIENS POSTULATS DE LA GÉOMÉTRIE.

De la droite.

On a donné un grand nombre de définitions de la ligne droite.

1. La ligne droite est une ligne indéfinie qui est le plus court chemin entre deux quelconques de ses points (Blanchet).

2. La droite est la plus courte des lignes qui ont les mêmes extrémités (Archimède); ou bien :

La droite est le plus court chemin d'un point à un autre (Legendre) (1).

3. La ligne droite est celle qui ne sort pas d'elle-même quand on la fait tourner autour de deux de ses points (Peyrard, suivi par M. Ueberweg).

4. La ligne droite est celle qui est semblablement placée entre ses points (Euclide).

5. La ligne droite est une ligne de direction constante (adoptée par M. Ueberweg).

Dans les deux premières définitions, on fait intervenir les idées de *distance* et de *minimum*, qui n'entrent pour rien dans la représentation de la ligne droite. On fait à priori de la ligne droite une mesure pour la distance, tandis que si la ligne droite est propre à mesurer les distances, c'est en vertu de sa nature. Cette définition est en outre *circulaire* et *négative*. — *Circulaire* : en effet, pour donner l'idée de la droite, elle dit : entre deux points tirez toutes les lignes *possibles*, et la plus courte sera la ligne droite. Il y a d'abord impossibilité matérielle de tirer ce nombre infini

(1) La définition de Legendre et celle de M. Blanchet pèchent par leur rédaction : Qu'est-ce qu'une ligne qui est un chemin? Pourquoi faire intervenir la notion du chemin dans celle de la ligne? Et d'ailleurs, si l'on avait à définir le chemin, on serait très-embarrassé, à moins de recourir à la notion de ligne. Legendre et Archimède ne définissent que la *portion de droite*, et non la *droite* elle-même; et M. Blanchet, en voulant corriger ce défaut, a rencontré une phrase assez obscure dans laquelle il dit que la droite indéfinie, un *chemin indéfini* par conséquent, est *le plus court chemin* entre deux de ses points. La rédaction la plus exacte était celle-ci :

La ligne droite est une ligne indéfinie dont chacune des portions est la ligne la plus courte que l'on puisse tracer entre les deux points qui limitent cette portion.

de lignes entre deux points : on se contentera donc d'en tirer une certaine quantité. Aura-t-on le bonheur de rencontrer la droite parmi celles-là ? Admettons-le. Mais comment la distinguer de ses compagnes? C'est la plus courte, dit-on. Or, pour reconnaître qu'une ligne est plus courte qu'une autre, on doit ou les *rectifier* toutes deux, puis les superposer; ou bien posséder une mesure fixe, qui ne peut être qu'une *droite*, une ouverture de compas, par exemple, qui, appliquée successivement sur les deux lignes, servira à les comparer. — *Négative* : car, supposez même cette constatation possible, on a bien le moyen de reconnaître si une ligne donnée est droite ou non, mais non celui de tracer entre deux points une ligne satisfaisant à la condition d'être le plus court chemin. La définition n'est pas génétique.

De là suit — et cette remarque deviendra encore plus intelligible quand nous aurons discuté la définition du plan — que l'existence possible, entre deux points, d'un plus court chemin ou d'une droite , n'est pas établie. Aussi Euclide demandait avec raison :

Qu'on puisse conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.

Comme nous l'avons dit, dans cette proposition, le sujet, *la ligne droite*, n'est pas un nom donné au concept exprimé dans l'attribut, mais une chose. *Cette* prétendue *définition est donc un théorème non démontré sur la droite.* Pour que ce théorème puisse servir de définition, il faut qu'il soit inversible, il faut que l'on puisse dire : tout plus court chemin entre deux points est une droite. Or, le postulat suivant :

Entre deux points on ne peut tirer qu'une ligne droite, admis par Legendre et M. Blanchet, et placé par eux au nombre des axiomes, permet de faire cette inver-

sion (1). Mais cette proposition n'est pas plus un axiome que celles-ci : Par un point, on ne peut faire passer qu'une brachistochrone ; par trois points, on ne peut faire passer qu'un cercle ; par cinq points, on ne peut faire passer qu'une section conique, etc.

En outre, la définition et le postulat ne s'appliquent qu'à la portion de droite. Quand on a tracé le plus court chemin entre deux points, et que l'on veut prolonger la ligne, n'y a-t-il qu'une seule manière de le faire ? En d'autres termes — inverse de la définition (théorème) donnée par M. Blanchet — toute ligne qui est le plus court chemin entre deux quelconques de ses points est-elle droite ? Le postulat suivant, posé par cet auteur, autorise une réponse affirmative :

Quand deux portions de droites coïncident, il faut regarder comme évident qu'elles coïncident dans toute leur étendue (2).

Outre ces postulats, il existe trois autres propositions indémontrées et indémontrables, qui ne sont mentionnées dans aucune géométrie ; les voici :

---

(1) Il ne suit pas de ce que la ligne droite est un minimum, que ce minimum soit nécessairement unique. Entre deux points d'une surface donnée (un fruit à côtes, par exemple), il peut y avoir plusieurs plus courts chemins.

(2) Ce postulat est remplacé, dans la géométrie de Legendre, par la proposition III, dans laquelle l'auteur démontre que si, à partir du point C, la droite AC se bifurquait en CD et CE, les angles droits FCD et FCE ne seraient plus égaux. Mais quand il a démontré que les angles droits sont égaux, il ne s'est pas placé dans l'hypothèse que cette même droite AC pût se bifurquer, auquel cas il y aurait eu deux perpendiculaires possibles, CF et CG à un même point C d'une droite, d'où l'inégalité des angles droits. Il y a donc cercle vicieux. Nous n'insistons pas sur ce point

Lorsque deux droites se rencontrent, elles passent chacune à l'autre côté de l'autre; en d'autres termes, elles se coupent;

Lorsque deux droites d'un même plan ne se rencontrent pas (sont parallèles), elles restent chacune du même côté de l'autre.

Lorsque deux droites d'un même plan ont chacune deux de leurs points situés des deux côtés de l'autre; elles se coupent (1).

Nous rencontrerons la première proposition en parlant de l'angle; la seconde en est la réciproque, et la troisième l'inverse.

Enfin, un dernier postulat tout aussi important, et qu'il est, croyons-nous, impossible de rattacher aux précédents, peut s'énoncer comme suit :

---

que l'ordre logique des propositions, auquel avait visé Legendre, est ici rompu, une proposition sur la droite venant après une proposition sur les angles.

M. Noël (*Traité de Géométrie et de Trigonométrie*) a donné de ce théorème une autre démonstration meilleure que celle de Legendre, mais qui n'est pas à l'abri de tout reproche. Si une droite AB prolongée se bifurquait en B suivant BC et BD, en faisant tourner la droite ABD autour du point A, on doit pouvoir amener un point de la portion BD sur un autre de la portion BC; soit I, ce point devenu commun; alors entre les deux points A et I, il y aurait deux lignes droites, ce qui est impossible, vu une proposition précédente. — Mais cette démonstration s'appuie sur l'imagination qui se représente la forme de la droite : pourquoi un des points de BD doit-il rencontrer BC? Si BC avait la forme d'un arc de cercle de centre A, par exemple, la rencontre n'aurait pas lieu. Cela suppose, en un mot, qu'un point de BD ne puisse contourner BC, comme le dit le postulat que nous énoncerons tantôt.

(1) Ainsi, quand on énonce le théorème que *les diagonales d'un parallélogramme se coupent en parties égales*, on admet subrepticement qu'elles se coupent.

Une portion de droite prolongée suffisamment, sort de tout espace qui la renferme.

M. Ueberweg seul a essayé une démonstration d'un cas tout particulier qui se présente dans la théorie des parallèles; et Euclide semble, de son côté, avoir aussi entrevu la difficulté, puisqu'il demande:

Qu'on puisse prolonger indéfiniment suivant sa direction une droite donnée (1).

La troisième définition donne lieu aux mêmes objections : l'existence d'une ligne qui peut tourner sur elle-même, n'est pas établie; aussi M. Ueberweg l'admet comme un fait empirique. Cette définition est négative; tout au plus permettrait-elle de reconnaître si une ligne *donnée* est droite ou non. Enfin, outre la plupart des postulats précités, elle suppose que *la ligne droite est la plus courte de toutes celles qui ont les mêmes extrémités.*

La définition d'Euclide se rapproche assez de la nôtre. M. Ueberweg a dirigé contre elle quelques critiques auxquelles nous renvoyons (2), en prévenant toutefois le lecteur que, des deux interprétations qu'on en donne, nous choisissons la première. D'ailleurs, cette définition est peu précise, puisqu'elle contient le terme non défini de *semblable*; elle est en outre négative et surabondante, chaque point de la droite devant se placer semblablement par rapport à *tous* les autres, quand *deux* suffisent pour en déterminer la position : il y a donc à établir l'existence d'une telle ligne. Enfin, elle laisse subsister également les postulats précités. Ainsi, Euclide pose en axiome

(1) Ainsi, quand par le centre d'un cercle on tire une droite comme diamètre, il n'est pas établi que cette droite coupe la circonférence.

(2) Voir, à la fin de cet ouvrage, la dissertation de cet auteur.

que *deux droites ne peuvent renfermer un espace*, et il ne touche pas la question de savoir si la droite est un minimum.

La cinquième définition de la droite est la plus en vogue aujourd'hui (1). Elle implique une définition de la *direction*, que beaucoup ne donnent pas, et que M. Ueberweg (2) énonce de la manière suivante : « La direction est la relation du lieu d'où part un élément mobile ou conçu comme mobile, au lieu où il va (3). Nous entendons par *relation de deux lieux*, la nature du passage d'un élément géométrique d'un lieu *a'* à un autre *b'*, laquelle découle de la différence entre la situation du lieu *b'* à l'égard du lieu *a'*, et la situation de tous les autres lieux que peut occuper *b'* dans son mouvement autour de *a'*. » (4)

Examinons d'un peu plus près cette définition de la direction.

Un lieu, dit l'auteur, n'est pas identique avec tout autre lieu qui a la même figure : ce par quoi il s'en

---

(1) Citons pour mémoire seulement la définition de Platon : *La droite est la ligne dont les extrémités sont ombragées par les points intermédiaires.* — Elle suppose le point lumineux placé sur la droite; elle implique que la lumière se propage en ligne droite, cercle vicieux; enfin elle appelle à son aide des notions extra-géométriques ; et elle ne supprime aucun des postulats mentionnés.

(2) Voir la dissertation de cet auteur, à la fin de cet ouvrage, et la *Logique* du même, page 305.

(3) On est tenté de dire : *où il se dirige.*

(4) La rédaction première, telle qu'on la trouve dans les *Archives pédagogiques*, était conçue en ces termes : On nomme *direction linéaire* la nature du passage d'un point α vers un autre point β *par un chemin que ces deux points déterminent complétement*, laquelle découle de la différence entre la situation du second point β à l'égard de α, et la situation des points de son mouvement autour de α à l'égard de ce même point α.

distingue, c'est *sa situation*. De là, les expressions : situation *à l'égard* d'un autre lieu, ou *par rapport à* un autre lieu. Le point *b'* peut être dans une infinité de situations par rapport au point *a'* ; ce nombre infini de situations forme une surface sphérique autour de *a'*. La situation particulière de *b'* est déterminée par rapport aux autres situations possibles ; et la nature du passage de *a'* vers *b'*, laquelle dépend de cette situation particulière, est la *direction* (1).

Sous toutes ces propositions un peu obscures se cachent plusieurs défauts et même des cercles.

1° La définition de la situation peut être philosophique, mais elle n'est pas géométrique ; car toute idée géométrique demande sa mesure. Sans doute, une figure se distingue d'une autre qui lui est égale, par sa situation ; mais cette distinction est toute *négative*, c'est-à-dire que l'on ne dit pas en quoi consiste cette différence. Si nous nous figurons dans l'espace deux points *a'* et *b'*, nous voyons bien que *b'* a *une autre* situation que *a'* ; mais *quelle* est cette situation ? M. Ueberweg ne nous l'apprend pas. En d'autres termes, si nous déplaçons le point *b'*, comment retrouver sa place antérieure ? Qui ne voit que cela n'est possible que par la direction *a'b'* et la distance *a' b'*, ou tout autre moyen (des coordonnées d'une nature quelconque) qui implique les notions précédentes ou même de plus compliquées ?

2° La situation de *b'* peut être différente, sans que la direction le soit. Tous les points d'une droite ont des situations différentes, quoiqu'ils soient tous dans la même direction.

(1) La première rédaction ajoutait, et, selon nous, avec raison : *en tant que ce passage est déterminé par les points a' et b'.*

3° M. Ueberweg répond : cette situation de b' est déterminée par rapport *aux autres lieux* de son mouvement autour de a'. Mais cette détermination est surabondante ; on peut lui faire l'objection que, avec M. Ueberweg, nous faisons à la définition du plan. (Voir plus bas). En effet, cette situation étant déterminée par rapport à *deux* de ces lieux sur cette surface sphérique, elle est déterminée par rapport à *tous les autres*. De manière que, d'après cette définition, pour avoir le point b', il faut supposer donnés ses rapports avec tous les autres points, et, comme deux de ces rapports suffisent, on se trouve dans l'embarras quand il s'agit de satisfaire aux autres, à moins que cela n'ait lieu de soi-même, ce qui est à démontrer.

4° Dans la première rédaction, M. Ueberweg ajoutait : *En tant que le passage est déterminé par le point de départ et celui d'arrivée*. Explicite ou implicite, cette incidente est nécessaire ; car toutes les espèces de passages de a' vers b' ne sont pas propres à mesurer la direction. En tout cas, c'est là en effet une propriété de la direction. Mais il est plusieurs de ces passages qui sont déterminés en quelque façon par le point de départ et celui d'arrivée ; la cycloïde, par exemple. Cette courbe est-elle une direction ?

5° Dans la définition même de la droite, la qualification de *constant* suppose la *variabilité* possible de la direction ; or, nous ne pouvons apprécier la constance ou la variabilité de la direction, qu'au moyen d'une direction fixe, *constante*. Le cercle est manifeste.

6° Cette définition est toute négative ; c'est-à-dire que, si elle permet, la constance étant supposée facile à constater, de reconnaître si une ligne donnée est droite ou non, elle n'indique cependant aucun moyen

de tracer la droite : comment peut-on placer un troisième point c' dans la direction $a' b'$? la définition ne le dit pas (1).

La définition de la droite que nous venons d'examiner ne supprime, pas plus que les autres, aucun des postulats ordinaires sur la ligne droite. Elle n'est qu'une proposition sur la droite, un véritable théorème ; de sorte qu'il reste à établir que :

Toute ligne de direction constante est une droite.

M. Ueberweg a essayé de cette proposition une démonstration dont voici les termes :

La ligne droite (troisième définition) est une ligne déterminée entièrement par deux de ses points ; la direction est déterminée par deux points, celui de départ et celui d'arrivée ; donc la ligne droite est la mesure de la direction.

Ce raisonnement est rigoureux dans le cas où la prémisse est mise sous forme inverse : toute ligne déterminée par deux de ses points est une ligne droite ; ce qui est possible pour M. Ueberweg ; car, dans son expérience III, il pose en fait qu'il n'existe qu'une ligne qui ait la propriété de tourner sur elle-même.

Du plan.

Le plan, disent Legendre et M. Blanchet, *est une surface sur laquelle, prenant deux points à volonté, et*

(1) Enfin, il y a cercle vicieux en français dans les mots *direction* et *droite*, car *droit* signifie *direct :* et l'on définit la *direction* par la ligne *directe*. Ce défaut toutefois n'existe pas en allemand où les mots *gerade* et *Richtung* semblent avoir des racines un peu différentes.

joignant ces deux points par une droite, cette ligne est tout entière dans la surface (1).

Voyons si nous pouvons construire cette surface. Supposons un point fixe dans l'espace et une droite fixe; puis par ce point, faisons passer une infinité de droites qui s'appuient toutes sur la droite fixe : nous engendrons ainsi une certaine surface. Cette surface est-elle un plan? Pour qu'il en soit ainsi, il faut que toute droite, passant par deux de ses points, y soit contenue tout entière; or, cela n'est pas démontré; et l'on doit prouver que, étant donnés un point et une droite quelconques sur cette surface ainsi engendrée, si l'on fait comme précédemment mouvoir une droite par ce point et sur cette droite, *on engendre identiquement* la même surface; et *tous les points* et *toutes les droites* de cette surface doivent, si c'est un plan, satisfaire à cette condition indispensable. La définition du plan, comme on le voit, implique une *infinité* de conditions dont *une seule* suffirait. Il devrait donc exister pour le plan un théorème ainsi conçu, qui est à l'état de postulat implicite :

Toute surface engendrée par le mouvement d'une droite (génératrice), qui, passant par un point fixe, s'appuie constamment sur une droite fixe (directrice), est un plan; et dont la démonstration consisterait à établir que si, dans cette surface, on prend une droite fixe et un point fixe quelconques, et qu'on fasse mouvoir une droite par ce point et sur cette droite, on engendre identiquement la même surface; ou plus simplement que:

(1) La définition suivante est préférable : *Le plan est une surface sur laquelle une droite peut s'appliquer tout entière dans tous les sens.* Ou, si l'on veut rendre l'intention précise de Legendre : *Le plan est une surface dans laquelle tombe tout entière une droite quelconque qui y a deux de ses points.*

Toute droite qui s'appuie sur deux génératrices s'appuie sur toutes.

La chose n'a pas été faite, et d'ailleurs elle ne pouvait l'être : on tourne forcément dans un cercle vicieux, et l'on démontre des théorèmes tautologiques, par exemple :

Théorème. Une ligne droite ne peut être en partie dans un plan, et en partie dehors.

Scholie. Pour reconnaître si une surface est plane, il faut appliquer une ligne droite en *différents* (il faudrait *en tous*) sens sur cette surface, et voir si elle touche la surface dans toute son étendue — méthode de vérification qui n'a rien de rationnel et est tout empirique.

Théorème. Par deux droites qui se coupent, on peut faire passer un plan et on n'en peut faire passer qu'un seul.

Démonstration. Par l'une des droites on fait passer un plan (ce qui est possible), et on le fait tourner jusqu'à ce qu'il passe par un point de l'autre droite, etc. Mais la question est de savoir s'il doit nécessairement passer par un point de cette autre droite. Un cône de révolution qui aurait son sommet au point de rencontre des droites, pour axe la première, et pour génératrice une droite différente de la seconde, ne rencontrerait jamais un point de cette seconde ; et puisque ce théorème est destiné à donner une idée du plan, on ne doit pas supposer cette idée préexistante.

Théorème. L'intersection de deux plans est une ligne droite.

Toutes ces propositions disent beaucoup moins que la définition du plan elle-même.

Appliquons enfin à une proposition célèbre, le postulatum d'Euclide, les modes de démonstration

employés pour le plan, et l'on verra combien ils sont illusoires.

Définition. Nommons *parallèles* deux droites situées dans un même plan, qui font avec toutes les droites qu'on peut tirer dans ce plan, des angles correspondants égaux.

Cette définition admise sans démonstration, sans qu'on s'enquière de la possibilité de tirer une droite parallèle à une autre droite donnée, on arrive à des théorèmes analogues à ceux que donne Legendre sur le plan, à savoir :

Théorème. Une droite ne peut être en partie parallèle à une autre, et en partie non parallèle ; c'est-à-dire deux parallèles restent parallèles dans toute leur étendue.

Théorème. Par un point on peut mener une parallèle à une droite donnée, et l'on n'en peut mener qu'une seule.

Démonstration. Par le point donné et un point de la droite donnée, on tire une droite ; puis au point donné on mène une droite qui fasse avec la droite auxiliaire le même angle que cette droite auxiliaire avec la droite donnée. Cela est possible, et n'est possible que d'une seule manière.

Théorème. Deux parallèles ne peuvent se rencontrer.

Démonstration. Car, si par le point de rencontre on menait une droite, celle-ci ne ferait pas le même angle avec les deux droites parallèles ; ce qui est contre la définition.

La conclusion de cette critique, c'est que la définition du plan est surabondante, contient plus de conditions qu'il n'en faut pour le construire, et par suite qu'elle ne peut être admise qu'à l'aide d'un théorème, qui en établit la possibilité ou l'existence.

La possibilité de tracer des figures rectilignes est donc une supposition toute gratuite; et l'on peut dire à ce point de vue que la géométrie manque de base.

La définition d'Euclide a les mêmes inconvénients, et de plus pèche par le vague :

La surface plane est celle qui est semblablement placée entre ses droites.

Le mot *semblablement* d'ailleurs n'est pas défini.

M. Ueberweg définit le plan : *le lieu géométrique de tous les points à égale distance de deux points fixes.*

Ces définitions, comme celle de Legendre, sont des théorèmes. On ne peut pas dire : « J'appelle *plan*, le lieu géométrique, etc. », parce qu'on appelle *plan*, une intuition primitive, de laquelle on ne peut affirmer qu'en *théorème*, qu'elle est un certain lieu géométrique, ou une surface semblablement placée entre ses droites.

De l'angle.

1. La figure formée par deux droites qui se coupent (1) s'appelle *angle* (Blanchet).

2. On nomme *angle*, la différence de deux directions (Ueberweg).

3. Lorsque deux droites se rencontrent, la quantité plus ou moins grande dont elles sont écartées l'une de l'autre, quant à leur position, s'appelle angle (Legendre).

4. Un *angle plan* est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan, et qui ne sont pas placées dans la même direction (Euclide).

5. *L'angle* est l'espace plan infini compris entre deux droites qui se coupent (Bertrand de Genève, et quelques autres auteurs).

---

(1) Il serait préférable de dire : *Qui partent d'un même point.*

Chacune des deux premières définitions, prise séparément, est incomplète, M. Blanchet ne définissant que la *forme* de l'angle, et M. Ueberweg la *grandeur* seulement. A elles deux, elles constituent une définition qui ne laisse rien à désirer, pour autant qu'on possède celle de la *direction*.

Celles de Legendre et d'Euclide sont obscures : qu'est-ce que *direction*, *position*, *inclinaison*, *écartement?* Il est fort difficile de définir l'un de ces termes sans y faire intervenir déjà la notion de l'angle (1). Comment d'ailleurs mesurer cet écartement? Lorsque plusieurs angles se suivent de manière à avoir deux à deux un côté commun, l'angle résultant est-il toujours égal à la somme des composants (2)?

La cinquième définition de l'angle a été imaginée

---

(1) Qu'on nous permette de citer ici quelques définitions du *Dictionnaire de l'Académie*, qui mettent cette difficulté en évidence :

L'*angle*, c'est l'*ouverture* de deux lignes qui se rencontrent en un point, l'*inclinaison* qu'elles ont l'une sur l'autre;

L'*inclinaison*, c'est l'*obliquité* d'une ligne ou d'une surface sur une autre;

L'*obliquité*, c'est l'*inclinaison* d'une ligne ou d'une surface sur une autre.

L'*ouverture*, c'est l'*écartement*;

L'*écartement*, c'est l'*éloignement*:

L' *éloignement*, c'est la *distance*.

Direction se dit encore du *côté* vers lequel une personne ou une chose se *dirige*, est *dirigée* ou *tournée*, et du mouvement de quelqu'un ou de quelque chose dans un certain *sens*;

Diriger signifie aussi faire aller, conduire dans un certain *sens*, *tourner* d'un certain *côté*;

Tourner vers, c'est marcher, se *diriger vers*;

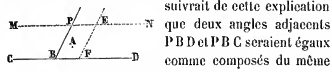
Sens signifie encore un des *côtés* d'une chose, d'un corps;

Côté se dit pour *endroit*, *partie quelconque* d'une chose.

(2) Cela n'a pas lieu, si les angles ne sont pas dans le même plan (voir la dissertation de M. Ueberweg, introduction).

pour servir à la démonstration du postulatum d'Euclide. L'angle PBD, disent ces auteurs, est composé d'une *infinité* de bandes parallèles et égales, telles que PBFE ou NPBD. L'angle EFD en contient, il est vrai, *une* de moins; mais, comme *toute quantité finie est nulle à l'égard de l'infini*, on peut dire à la rigueur qu'il est égal à l'angle PBD.

Sans parler de ce principe auxiliaire sur l'infini, qu'il serait dangereux d'introduire dans les éléments, il suivrait de cette explication que deux angles adjacents PBD et PBC seraient égaux comme composés du même nombre de bandes parallèles telles que NPBD et MPBC (1). Ou bien encore, comme l'a fort bien fait remarquer M. Lamarle (2), il s'en suivrait que les angles sont entre eux comme leurs sinus. Autre conséquence absurde : si l'angle est une portion de plan, il doit jouir des propriétés d'une portion de plan en général; or, toute projection d'une surface plane sur



---

(1) Il n'est pas vrai que l'angle soit composé de bandes parallèles *égales*, car si on termine l'angle par un arc de cercle — ce qui est la seule manière rationnelle de le terminer, — les bandes parallèles diminuent à mesure qu'on s'éloigne du sommet. En définitive, ces auteurs engendrent l'angle au moyen du mouvement isogénique de la bande A le long de la droite BD, il faut donc admettre la proportion : PBD : PN = PBC : PM. Or, PM est évidemment égal à PN (par abus de langage, en attribuant l'égalité aux infiniment grands), donc les angles PBD et PBC sont égaux, ce qui est absurde. — Le mouvement générateur véritable est celui de la droite BP autour du point B (voir ce que nous disons à la page 153 sur l'isogénéité).

(2) *Moniteur de l'Enseignement*, année 1852, nouvelle série, t. I, p. 298. On peut lire dans ce recueil une discussion curieuse entre cet auteur et M. Noël, à propos de cette définition.

un plan, est égale au produit de cette dernière par le cosinus de l'angle qu'elle fait avec le plan de projection. Comme de deux angles l'un peut toujours être regardé comme étant la projection de l'autre, il s'en suivrait que les angles seraient entre eux comme leurs tangentes (1).

Des paralleles.

Nous arrivons enfin au fameux postulatum d'Euclide, *crux geometrarum*, qu'on a cherché à éviter en donnant des définitions plus ou moins forcées de l'angle ou des parallèles (2), comme si une définition pouvait rem-

(1) C'est pour la théorie de l'angle qu'il serait nécessaire de démontrer le postulat mentionné plus haut (que deux droites qui se rencontrent se coupent). Sans cela, la proposition que les angles opposés par le sommet sont égaux, par exemple, pourrait être soupçonnée de démontrer la propriété d'une figure qui n'existe pas.

(2) On connaît la définition ordinaire : *Les parallèles sont des droites, situées dans un même plan, et qui ne peuvent se rencontrer, si loin qu'on les suppose prolongées.* — La première difficulté qui se présente, est celle de savoir si par un point on ne peut mener qu'une parallèle à une droite.

Autre définition : *Deux parallèles sont deux droites qui sont toujours à la même distance l'une de l'autre.* — Cette définition demande immédiatement qu'on démontre ce théorème : Une ligne équidistante d'une droite est elle-même une droite.

On a dit aussi : *Une droite est parallèle à une autre droite, lorsqu'elle a deux de ses points équidistants de celle-ci.* — Mais on n'a pu rien tirer de cette définition.

Legendre proposait cette autre : *Deux droites sont dites parallèles, lorsqu'elles font avec une même troisième deux angles internes du même côté de celle-ci, dont la somme est égale à deux droits.* — Cette définition laisse de même subsister le postulat d'Euclide.

M. Martin (*Philosophie spiritualiste de la nature*, tome I, page 272) dit : « On nomme *parallèles entre elles, deux lignes droites telles que leur distance soit constante, c'est-à-dire telles que les perpendiculaires menées des divers points de l'une de ces lignes sur l'autre soient toutes*



placer un théorème! que l'on a démontré par des moyens plus ou moins ingénieux, mais qui ont tous l'inconvénient ou d'impliquer des postulats plus difficiles à admettre que celui d'Euclide, ou de se baser sur des considérations que leur seul caractère de transcendantes suffit quelquefois pour rendre suspectes, et qu'en tous cas on ne peut faire entrer dans la géométrie élémentaire.

égales entre elles. Il est évident que ces deux lignes ne peuvent être que dans un même plan, et qu'indéfiniment prolongées toutes deux dans les deux sens, elles ne se rencontreront jamais. »

Mill (*Logique inductive*, chap. 24, § 7) fait les réflexions suivantes : « Les géomètres ont toujours préféré de définir les parallèles par la propriété d'être situées dans le même plan et de ne pas se couper. Ils s'y voient forcés, pour ne pas accepter comme axiome une autre propriété quelconque des parallèles; et la manière peu satisfaisante dont Euclide et tant d'autres ont choisi cette propriété dans ce but, a toujours été considérée comme un opprobre pour la géométrie élémentaire. Comme définition de mots, l'équidistance est une propriété plus convenable pour caractériser les parallèles, et cet attribut est lui-même renfermé dans le mot. Si dans le parallélisme, il n'y avait rien d'autre de compris que la situation dans le même plan et la non-intersection, rien ne défendrait de dire d'une courbe qu'elle est parallèle à ses asymptotes. *Sous le nom de parallèles, on entend des lignes qui ont exactement la même direction, et qui par là ne s'approchent ni ne s'éloignent l'une de l'autre*, représentation qui ressort immédiatement de l'observation de la nature. Que ces lignes ne puissent se rencontrer, cela se trouve naturellement compris dans la proposition qu'elles sont toujours à égale distance; et l'on peut démontrer de la manière la plus rigoureuse que les lignes droites situées dans le même plan et non également distantes l'une de l'autre, doivent se couper, en partant de la propriété fondamentale de la ligne droite acceptée plus haut, c'est-à-dire que, si elles partent du même point, elles s'éloignent de plus en plus l'une de l'autre. »

Cette propriété de la ligne droite, Mill l'admet comme un fait d'observation (voir la théorie de cet auteur, p. 15, et la fin de ce paragraphe).

M. Ueberweg, quelques autres géomètres et Mill lui-même, ainsi

La célébrité de ce postulatum vient de ce que, sous une simplicité apparente, se cachent des difficultés jusqu'ici insurmontées et déclarées insurmontables; et que, d'un autre côté, nul n'a encore, que nous sachions, indiqué la cause de ces difficultés. Mais, par ce qui précède, on a pu voir que d'autres postulats tout aussi ardus se présentent au seuil même de la géométrie, et en feraient une science tout hypothétique, si l'on n'était pas certain de l'existence des propriétés que l'on admet

---

qu'on vient de le voir, définissent les parallèles, des *droites qui ont la même direction.* — Malheureusement, comme nous l'avons déjà dit, et comme nous espérons le mettre encore mieux en évidence plus tard, la vraie notion de la direction leur a échappé. Comment construire deux lignes qui aient même direction (voir l'article de la *Quaterly Review*, cité p. 22, et la dissertation de M. Ueberweg qui en donne un moyen long et difficile)? C'est ce qui fait qu'ils n'ont pu ni l'un ni l'autre démontrer directement le postulatum d'Euclide, qui se présente alors sous cette forme : *Deux droites qui n'ont pas même direction se rencontrent quelque part, (quand elles sont situées dans le même plan).*

M. Frantz (*Die Philosophie der Mathematik*, p. 118), propose la définition tirée de l'*équidistance;* mais il cherche à établir la *rectitude* de la ligne *équidistante*, en se basant sur la définition qu'Euclide donne de la droite (voir le chapitre suivant). Pour lui la théorie des parallèles se résume en cinq propositions, dont les trois premières (*a.* Lorsqu'une droite est équidistante d'une autre, celle-ci est équidistante de celle-là, et leur éloignement réciproque est le même; *b.* Toute droite qui a deux de ses points équidistants d'une autre, lui est parallèle; *c.* Lorsque deux parallèles sont coupées par une sécante, la somme des angles intérieurs est de deux droits) sont encore dépourvues de preuves géométriques. Mais il ajoute qu'*elles sont si simples qu'on s'en passe facilement; que leur simplicité est une recommandation pour la théorie des parallèles, et qu'elles écartent les obscurités et les vices qui s'y rencontrent tout en y ramenant la méthode géométrique.*

Ceux qui seraient curieux de connaître l'opinion de Hegel sur ce point délicat, la trouveront dans la première partie de sa logique.

sans contrôle. C'est même par ces postulats que l'on aurait dû commencer, pour s'assurer si les lacunes précédentes ne proviennent pas d'une première lacune, mère de toutes les autres. « C'est sans doute, dit Legendre, à l'imperfection du langage vulgaire, et à la difficulté de donner une bonne définition de la ligne droite, qu'il faut attribuer le peu de succès qu'ont obtenu les géomètres, quand ils ont voulu déduire ce théorème (la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits) des seules notions sur l'égalité des triangles que contient le premier livre des éléments. »

Cela peut être très-juste, mais il ne semble pas que l'on ait cherché à corriger la définition de la ligne droite, pour voir si le peu de rigueur que présente la théorie des parallèles, provient de la cause qu'on lui assigne.

Enfin, a-t-il été démontré de ce théorème ce qui l'est de la quadrature du cercle ? Non ; et c'est ce qui explique la persistance qu'on a mise à le résoudre. Ampère dit bien que la notion de parallélisme implique celle de l'infini ; M. Renouvier (1), que l'on a voulu démontrer les propriétés des figures sans se servir de l'imagination, et que l'on n'a pas vu que l'idée même de droites parallèles nous forçait à admettre le postulat ; M. Bailly voit dans l'équidistance, un simple fait géométrique ; les sensualistes et les matérialistes modernes, une proposition empirique ; bien plus, Gauss lui-même, et après lui, Lobatschewsky, ont essayé d'établir cette dernière assertion par la création d'une *Géométrie imaginaire*, dont nous avons déjà dit quelques mots (2) ;

(1) *Manuel de philosophie ancienne*, tome II, page 346.

(2) Voir Liv. I, page 76.

enfin, la plupart sont d'avis que la meilleure preuve que cette difficulté est insoluble, c'est qu'on n'a jamais pu la résoudre. « Les efforts infructueux tentés depuis Euclide, dit M. Lamarle, indiquent qu'il n'y a pas de solution à espérer dans la voie de mes prédécesseurs, et cette considération m'aurait détourné de toute recherche, si, etc.... »

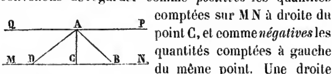
Quoi qu'en pense ce dernier géomètre, on ne laisse pas de poursuivre, et à bon droit, suivant nous, cette solution qui échappe toujours. Ne pourrait-on pas, du reste, en retournant l'argument, soutenir que les efforts nouveaux que l'on fait encore aujourd'hui pour trouver une solution, indiquent que celles que l'on a fournies jusqu'à présent, sont peu satisfaisantes ? En effet, les moyens les plus divers et les plus ingénieux n'ont pas fait défaut; il serait même difficile de les énumérer tous; mais c'est ici le cas de dire avec Lafontaine:

N'en ayons qu'un, mais qu'il soit bon.

Ce postulatum est inévitable, il se présente immédiatement après les théorèmes sur les angles; il y a bien possibilité de démontrer, sans lui, encore quelques propositions sur les triangles et sur la circonférence, mais on ne fait par là que rompre l'ordre philosophique, esthétique des propositions, sans en tirer aucun secours.

Le postulatum d'Euclide a une signification bien plus haute que celle qu'on lui attribue généralement. Pour devenir négative de positive qu'elle était, une quantité doit passer par zéro ou par l'infini; dans les deux hypothèses, la position intermédiaire est unique; et la seconde implique toujours le postulatum d'Euclide. Nous nous expliquons.

Soient MN et AC deux droites perpendiculaires, et convenons de regarder comme *positives* les quantités comptées sur MN à droite du point C, et comme *négatives* les quantités comptées à gauche du même point. Une droite



qui se meut autour du point A de gauche à droite, coupe la droite MN en des points tels que B, de plus en plus éloignés du point C, c'est-à-dire, en des points à une distance BC *positive* de plus en plus grande, qui devient infinie quand la droite a la position PQ parallèle à MN, et qui passe immédiatement au *négatif* par la continuation du mouvement qui amène la droite en AD; quand elle a pris la position AC, l'abscisse est nulle, pour redevenir ensuite *positive*. Or, les deux positions AC et PQ sont uniques; il est plus facile de le démontrer pour le cas de la perpendicularité (1); mais le cas du parallélisme est rétif. De même, pour en citer encore un exemple, quand une section conique passe de la forme elliptique à la forme hyperbolique, auquel cas un des axes passe du positif au négatif par l'infini, il y a aussi une position intermédiaire qui donne la parabole, et c'est précisément quand le plan sécant est parallèle à l'une des arêtes du cône.

Ce postulatum a été formulé par Euclide de la manière suivante :

Si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs d'un même côté plus petits que deux droits,

---

(1) Et pourtant encore la proposition que d'un point extérieur on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire à une droite, n'est pas, jusqu'à présent, démontrée d'une manière bien simple et sans une duplication de la figure.

ces deux droites prolongées se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

Ce postulat se ramène facilement à la forme adoptée par Legendre, M. Blanchet et beaucoup d'autres, moins générale sans doute, mais plus claire encore :

Une perpendiculaire et une oblique à une même droite se rencontrent, quand on les prolonge suffisamment.

Nous allons passer en revue les principales démonstrations qu'on a données de ce postulat.

Les unes, proposées par Bertrand de Genève, se basent sur la considération des infinis de différents ordres, et prétendent établir directement le postulatum ; les autres, dont la plupart ont été données par Legendre, ont pour but de démontrer, indépendamment de la théorie des parallèles, que la somme des trois angles d'un triangle est égale à deux droits, en partant des notions généralement admises en géométrie ; enfin Legendre, M. Lamarle, M. Ueberweg et d'autres encore, ont eu recours à des principes nouveaux ou extra-géométriques, pour démontrer cette même proposition sur les angles du triangle. Nous nous occuperons d'abord des principes divers de ces démonstrations en elles-mêmes, puis de la manière dont on veut déduire de la vérité démontrée, le postulatum lui-même.

Le premier genre de démonstration part de la définition de l'angle que nous avons critiquée plus haut, à savoir que l'angle est l'espace plan compris entre deux droites qui se coupent. On admet que le plan ayant deux dimensions infinies, et l'angle étant une partie déterminée du plan, sont des infinis du second ordre ; que l'espace compris entre deux parallèles, n'ayant qu'une dimension infinie, est un infini du premier ordre, nul par conséquent à l'égard de l'infini de l'angle ; et

que toute figure fermée, finie, est nulle à l'égard de celui-ci comme de celui-là.

Sur ces principes se base à peu près aussi la démonstration suivante tirée du journal de Crelle (1) :

Soient deux droites AC et BD faisant avec une même troisième AP deux angles intérieurs du même côté, à savoir CAB et DBA, plus petits que deux droits ; ces droites se rencontreront si on les prolonge suffisamment.

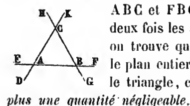
Démonstration. Je tire la droite AE de manière que les angles DBP et EAP soient égaux ; l'angle EAC est un angle fini, et l'on peut poser : $n\,EAC = EAF > EAP$; mais on peut aussi poser : $n\,EABD = EAGH < EAP$; pour cela il suffit de prendre $AG = n\,AB$, et de faire les angles DBP et HGP égaux ; or de ces deux inégalités on tire : $n\,EAC > n\,EABD$, d'où : $EAC > EABD$; la droite AC doit donc sortir de la bande EABD et couper la droite BD.

Legendre, dans un mémoire qu'on peut lire dans les recueils de l'Institut de France (1833) et dont nous analyserons tantôt le contenu, donne une autre démonstration en se basant sur les mêmes principes et en ne considérant que les seuls *biangles* ; c'est ainsi qu'il appelle l'espace compris entre deux parallèles s'appuyant sur une même droite. Dans le courant de cette démonstration, il pose le biangle CABD égal au biangle CMND, négligeant ainsi leur différence finie ABMN, et, à ce propos, il fait remar-

(1) Année 1834. — La rédaction de la démonstration a été un peu modifiée pour simplifier la figure.

quer que, pour que deux quantités soient égales, « il n'est pas absolument nécessaire que leur différence soit nulle; il suffit que le rapport de cette différence à l'une des deux quantités comparées, soit plus petite que toute fraction donnée de l'unité. »

Enfin, on peut encore démontrer à priori que la somme des trois angles d'un triangle est égale à deux droits; car, si l'on fait la somme des angles CAB et DAE, ABC et FBG, BCA et HCK, ou de deux fois les angles du triangle ABC, on trouve que cette somme comprend le plan entier augmenté de deux fois le triangle, c'est-à-dire quatre droits *plus une quantité négligeable.*



Sans vouloir attaquer ces principes, il n'est besoin, pour faire rejeter ces démonstrations, que de signaler les absurdités où conduit la définition susdite de l'angle et que nous avons énumérées précédemment.

Nous abordons maintenant la critique des démonstrations du théorème sur la somme des angles du triangle. Les quatre premières sont l'œuvre de Legendre :

1. La première se base sur ces deux propositions :

A. La somme des trois angles d'un triangle rectiligne ne peut être plus grande que deux droits.

B. S'il existe un seul triangle dans lequel la somme des angles soit égale à deux angles droits, on doit en conclure que, dans un triangle quelconque, la somme des angles sera pareillement égale à deux angles droits (1).

(1) Voici la démonstration de ces deux propositions :

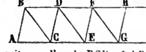
A. La somme des trois angles d'un triangle rectiligne ne peut être plus grande que deux angles droits.

Soit une suite de *n* triangles égaux, ABC, CDE, EFG, dont les bases sont sur une même ligne droite AG et dont les sommets

« D'après cette démonstration, continue Legendre, la question qui nous occupe est réduite à trouver un triangle, et un seulement, dans lequel la somme des angles soit égale à deux angles droits ; or, il n'est personne qui, en essayant de se servir de la règle et du compas, n'ait réussi à former des triangles qui jouissent de cette propriété. Car, en faisant un carré, par exemple,

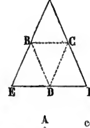
---

sont reliés par les droites BD, DF, FH, etc.; si la somme des angles de chacun d'eux est plus grande que deux droits, comme les angles en C, par exemple, sont égaux à deux droits, il suit que l'angle BCD $<$ ABC, et que par conséquent AC $>$ BD, d'où AC $=$ BD $+ \lambda$; λ étant une quantité finie quelconque; on pourra donc poser AK $=$ BDFHL $+ n\lambda$, et prendre n assez grand pour que $n\lambda$ soit au moins égal à 2AB; et l'on aurait ainsi entre les deux points A et G, une ligne brisée ABHG plus petite que la droite AG qui joint ces deux points.

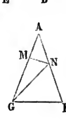


Cette démonstration est rigoureuse; malheureusement on ne peut démontrer de la même manière que la somme des angles n'est pas plus petite que deux droits; Legendre reconnaît lui-même les difficultés de ce problème et les déclare insurmontables.

B. S'il existe un seul triangle dans lequel la somme des angles soit égale à deux angles droits, on doit en conclure que, dans un triangle quelconque, la somme des angles sera pareillement égale à deux angles droits.



1° Soit ABC ce triangle, le triangle AEF où les côtés sont doubles, aura les mêmes angles que le premier, et jouira par conséquent de la même propriété que lui; et il en sera de même de tous les triangles dont les côtés procéderont en raison double.



2° Tout triangle AMN qui aura l'angle A égal à celui du triangle ABC, aura aussi ses angles égaux à deux droits. Soit AGH un triangle de la série précédente, dont les côtés soient plus grands que les côtés AM et AN du triangle proposé; la somme des angles des trois triangles AMN, GMN et GNH se compose des angles du triangle AGH, des angles

on voit manifestement que ses quatre angles sont droits, et qu'ainsi, en tirant une diagonale, etc. » Mais d'où sait-on que les quatre angles d'un carré sont droits ? par définition, répondra-t-on. Or, la définition du carré a besoin d'être justifiée. Un carré est un quadrilatère qui a ses quatre côtés égaux et ses quatre angles égaux ; impossible de tirer de là que dans un carré les quatre angles sont droits ; il faut pour cela avoir déterminé, au préalable, la somme des trois angles d'un triangle. Il y a donc pétition de principe. On peut faire la même objection à l'exemple du triangle équilatéral formé par deux rayons d'un cercle et la corde d'un arc de 60°. Legendre ajoute, il est vrai, que « la rigueur géométrique ne se contente pas d'une vérification faite ainsi par des constructions graphiques qui, en général, sont sujettes à quelque erreur, et que c'est sur le raisonnement seul, guidé, si l'on veut, par une figure, que la théorie doit être établie. »

2. La démonstration suivante est plutôt du ressort de l'analyse que de celui de la géométrie :

Deux triangles sont égaux, quand ils ont un côté

---

en M et des angles en N, en tout six droits; or, aucun d'eux ne peut avoir des angles plus grands que deux droits, donc chacun d'eux a ses angles égaux à deux droits.

3° Un triangle quelconque *abc*, dont tous les angles sont différents de ceux du triangle ABC, doit avoir au moins un de ses angles plus petit que l'un de ceux de ce triangle; soit *bac* cet angle, et tirons *af* de manière que l'angle *baf* soit égal à cet angle plus grand que *bac* du triangle *abc*; tirons *bf* arbitrairement; par 2°, le triangle *baf* a ses angles égaux à deux droits; le triangle *bad* qui a avec ce dernier l'angle commun en *b*, a aussi ses angles égaux à deux droits; et enfin le triangle *abc* ayant l'angle *a* commun avec le triangle *abd*, a, lui aussi, ses angles égaux à deux droits, C.Q.F.D.

égal et adjacent à deux angles égaux; donc ce côté P et les angles A et B adjacents étant donnés, le troisième angle C est complétement déterminé. On peut donc regarder C comme une fonction des quantités A, B, P et poser : $C = \varphi\,(A, B, P)$. De là, en résolvant l'équation par rapport à P, on tire : $P = \varphi'(A, B, C)$. Or, si l'on représente l'angle droit par l'unité, les quantités A, B et C sont des nombres, et l'on aurait P égal à un nombre, ce qui est absurde. De là suit que, si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième angle du premier est égal au troisième angle du second. Cela admis, il est facile de démontrer que, dans tout triangle rectangle, la somme des angles aigus est égale à deux droits, en abaissant la hauteur, qui divise le triangle en deux autres qui ont leurs angles égaux à ceux du grand triangle.

Cette démonstration très-profonde, a le tort de ne pas être élémentaire, et de sortir des voies ordinaires de la géométrie. Legendre a essayé de l'y faire rentrer au moyen d'une démonstration (1) dont l'essence con-

(1) Voici cette démonstration :

Soit ABC un triangle dans lequel on connait le côté AB avec les deux angles adjacents A et B, et supposons que la somme des angles de ce triangle soit inférieure à deux droits. Par un point D quelconque pris sur le côté AB, menons DE de manière que l'angle ADE soit égal à l'angle ABC; l'angle en E est égal à l'angle C—auquel cas il n'y a plus rien à démontrer—ou il est plus grand; car, s'il était plus petit, les angles du quadrilatère CBDE feraient plus de quatre droits, et alors en le divisant par une diagonale, l'un des triangles au moins aurait ses angles plus grands que deux droits, ce que nous avons vu être impossible. Faisant mouvoir la droite DE de manière à ne pas changer les angles en D, on forme ainsi une suite de triangles dont les angles

siste en ceci : les côtés étant représentés par un certain nombre d'une unité de longueur déterminée, lorsque l'on change cette unité de longueur, ce qui revient à *former un nouveau triangle où les côtés sont proportionnels*, les angles n'ont pas changé de valeur; en d'autres termes, les triangles qui ont les côtés proportionnels ont les angles égaux, et par conséquent sont semblables.

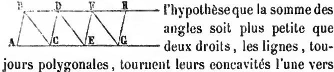
Il est impossible de réfuter ces démonstrations de Legendre ainsi que celle qui suit, puisque les principes sur lesquels elles se basent sont vérifiés dans le fait, et ne peuvent ainsi mener à aucune conséquence absurde. On ne peut pas non plus y trouver de cercle vicieux, puisque ces principes mêmes sont nouveaux et employés exclusivement dans la théorie des parallèles; et, bien que nous devions bientôt établir à priori quelques-uns d'entre eux, nous ne pouvons que les repousser ici par une fin de non-recevoir, car ils sont en eux-mêmes, tels qu'on les expose, moins clairs que le postulatum d'Euclide.

3. Construisons une suite de triangles égaux ABC, BCD, CDE, DEF, etc.; dans l'hypothèse que la somme des angles de chacun de ces triangles soit plus grande que deux droits, les angles en C, D, E, F, G, etc., sont plus grands que deux droits, de sorte que les deux lignes AG et BH ont la forme de deux polygones réguliers tournant leurs convexités l'un vers l'autre,

---

AED sont d'autant plus grands que la droite AD est plus petite : de sorte que ce côté AD est déterminé quand on donne les trois angles A, D et E; c'est-à-dire quand on donne trois nombres; résultat évidemment absurde, car un nombre ne peut représenter la grandeur de AD, la nature de la question ne pouvant nous donner aucune lumière sur l'unité de longueur, mètre, toise, ou pied.

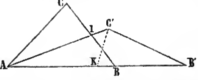
et occupant, par conséquent, un espace limité, tandis qu'en fait, par la nature même de leur génération, ces lignes sont indéfinies. Dans l'hypothèse que la somme des angles soit plus petite que deux droits, les lignes, toujours polygonales, tournent leurs concavités l'une vers l'autre, et la même absurdité est mise en évidence.



Cette démonstration, comme on le voit, admet un principe d'intuition, l'impossibilité pour une ligne polygonale régulière de se prolonger à l'infini, principe qui ne se trouve pas dans les axiomes ordinaires et qu'il serait difficile d'y introduire : elle est en contradiction avec les paroles de Legendre citées plus haut, que « c'est sur *le raisonnement seul*, guidé, si l'on veut, par une figure, que doit se baser une théorie. » Dans l'espèce, c'est l'imagination seule qui sert de base.

4. La démonstration suivante a été insérée dans la 12e édition de la Géométrie et dans les éditions subséquentes. A un certain point de vue, c'est la plus ingénieuse, la plus simple et la plus rigoureuse.

Soit un triangle quelconque ABC, dont AB soit le plus grand côté, BC le plus petit, et AC le côté moyen pouvant être égal accidentellement à l'un des deux autres. Si, par le milieu I de BC, on mène AC′ = AB, qu'on prenne AK = KB′ = AI, les deux triangles AIB et AKC′ sont égaux, ainsi que les triangles AIC et B′KC′, de sorte que la somme des angles du triangle AB′C′ est la même que celle des angles du triangle ABC, et que de plus on a dans ce triangle,



comme dans l'autre : $AB' > AC' > C'B'$. On peut donc répéter la même construction indéfiniment; tous les triangles résultants jouiront des mêmes propriétés.

Étudions maintenant les angles du triangle $AB'C'$ que nous désignerons par A_1, B_1, C_1, tandis que nous emploierons les lettres A, B, C pour les angles du triangle ABC. On a : $C_1 = B + C$; $A = A_1 + B_1$; et comme on a : $AC' > B'C'$, on a aussi : $B_1 > A_1$; de sorte que : $A_1 < \frac{1}{2}A$; $B_1 < A$. Pour le triangle suivant on aura de même : $A_2 < \frac{1}{2}A_1 < \frac{1}{4}A$; $B_2 < A_1 < \frac{1}{2}A$; et en général, dans le triangle AB^nC^n, on aura :

$$A_n < \frac{1}{2^n}A\,;\ B_n < \frac{1}{2^{n-1}}A\,;\ \text{et}\ A_n + B_n = A_{n-1}\,;$$

cet angle A_{n-1} pouvant être plus petit que tout angle donné; de sorte qu'on peut regarder les angles du triangle AB^nC^n comme réduits au seul angle C_n; or, si l'on considère un triangle extrême, où les angles A_n et B_n sont à peu près nuls, les trois sommets A, C^n et B^n sont à peu près en ligne droite, et ils le seront à la limite où les angles A_n et B_n sont nuls; dans ce cas l'angle C_n est équivalent à deux droits. Le théorème est donc démontré.

Cette démonstration conclut par un procès à l'infini; elle en appelle en outre à l'imagination (et non plus au *raisonnement guidé par la figure*), quand elle représente les trois points A, C^n, B^n comme se rapprochant de la ligne droite, car, par la construction même, le point C^n reste toujours à une distance de AB^n finie et facilement calculable (1).

(1) On peut lire, sur cette démonstration, l'ouvrage déjà cité : *Die Philosophie der Mathematik*, par C. Frantz, p. 116.



5. M. Lamarle a publié, en 1856, une démonstration du postulatum d'Euclide, à laquelle il a attribué toutefois une importance moins pédagogique que scientifique, et qui n'est qu'une application des principes de haute analyse de l'auteur à cette question si longtemps restée insoluble : il prétend établir, même en ce point, la supériorité de ces principes sur la méthode infinitésimale. On peut lire ce travail dans les Bulletins de l'Académie de Belgique. Il est trop long pour que nous puissions ici en donner autre chose qu'une courte analyse, suffisante tout au plus pour en faire apprécier la marche.

Il s'agit d'établir que toute ligne équidistante d'une droite est elle-même une droite. L'auteur commence par prouver que la droite qui joint les extrémités de deux perpendiculaires élevées aux extrémités d'une portion de droite, ne peut être plus grande que cette portion. Le procédé qu'il emploie est analogue à celui dont se sert Legendre pour prouver que la somme des angles d'un triangle ne peut dépasser deux droits. De là suit que la ligne équidistante, si ce n'est pas une droite, est une ligne courbe, mais qui se trouve toujours en dessous d'une perpendiculaire élevée à l'extrémité de la droite qui mesure la distance d'un point de cette courbe à la droite donnée, de sorte que cette perpendiculaire est tangente à la courbe. M. Lamarle engendre ensuite la courbe au moyen d'une rotation de cette même perpendiculaire autour d'un point mobile sur elle, et il prouve que, dans le cas dont il s'agit, cette rotation est nulle, c'est-à-dire que la prétendue courbe est une droite. En même temps il établit par là que toute perpendiculaire à une droite l'est aussi à son équidistante; plus de difficulté dès lors de prouver que, dans un triangle rectangle, la

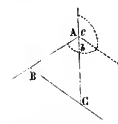
somme des angles aigus est égale à un droit, d'où suit, pour un triangle quelconque, la propriété connue.

Cette démonstration, fort remarquable du reste, est assez difficile à suivre, et l'imagination du lecteur est trop souvent mise en jeu, pour qu'il soit possible d'affirmer que les principes ou les conclusions adoptés dérivent toujours d'un raisonnement rigoureux. M. Lamarle ajoute d'ailleurs lui-même : « On objectera peut-être que notre démonstration n'offre pas, sous la forme que nous lui avons donnée, toute la simplicité désirable. L'important est qu'elle soit exacte, et, si l'on peut la rendre plus simple et plus rapide, il suffit, pour nous, qu'elle offre par elle-même les éléments d'une solution meilleure. A d'autres plus habiles et plus exercés, nous laisserons le soin de modifier, s'il y a lieu, et d'améliorer ce premier travail. Toutefois, *ce serait*, pensons-nous, *se faire illusion que d'espérer traiter et résoudre en quelques lignes, un problème qui a déjoué, pendant si longtemps, les efforts de tant de géomètres.* » M. Lamarle laisse subsister ainsi l'une des difficultés capitales de ce problème, c'est-à-dire la nécessité de donner une solution rapide.

6. Parlons maintenant d'une démonstration nouvelle et célèbre, dans laquelle le postulat est dissimulé avec art sous une apparente simplicité. L'auteur demande qu'on lui accorde, qu'une droite qui tourne autour d'un de ses points de manière à revenir à sa position primitive, quel que soit le mode de rotation, soit censée avoir tourné de quatre angles droits (1). Cela posé, il est facile de démontrer que la somme des angles extérieurs d'un triangle est égale à quatre droits. On fait

(1) Voir C. Frantz, *Die Philosophie der Mathematik*, p. 116.

avancer le côté AB le long de lui-même, de manière à amener le point A en B, puis on le fait tourner autour de ce même point d'un angle B, de manière à ce qu'il prenne la position BC. Cela fait, ce même point A, qui est maintenant en B, glisse en C; puis faisant tourner le côté, de manière à ce qu'il décrive l'angle C, on couche le côté suivant CA. Enfin, on fait glisser le point A de C en A, et décrire au côté l'angle A, de manière que le côté AB est revenu dans sa position première. Or, la somme des angles décrits est celle des angles extérieurs du triangle. Donc cette somme, en vertu de la demande, est égale à quatre droits.



Mais qui ne voit maintenant que c'est la demande elle-même, malgré son évidence apparente, qui contient le postulat? Sans doute, la somme des angles formés autour d'un même point, est égale à quatre droits, mais non celle des angles formés autour du triangle par un mouvement continu. On admet au fond que, si par le point A on mène une droite, qui fait l'angle *b* égal à l'angle extérieur B, le troisième angle *c* est égal au troisième angle extérieur C; et c'est précisément ce qu'il faut démontrer. Ou encore, comme le dit M. Lamarle, on admet implicitement que l'angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des deux intérieurs qui lui sont opposés.

On ne peut assez s'étonner que le postulat se trouve dissimulé dans une demande aussi simple que celle qui sert de base à cette démonstration ; il y aurait à rechercher si ce n'est pas l'absence d'un principe resté dans l'ombre, qui nous force de nous arrêter un peu en

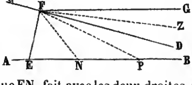
deçà du rivage. Nous démontrerons en effet toutes ces propositions auxiliaires, en nous basant sur les principes que nous avons antérieurement déduits.

Citons encore M. Ueberweg, qui, introduisant l'idée de direction dans la définition de la droite, n'a pas de peine à prouver que la somme des angles extérieurs d'un polygone quelconque, est égale à quatre droits, d'où la proposition sur les angles du triangle.

Voyons maintenant, en supposant cette dernière proposition démontrée, comment on en déduit celle qui fait l'objet du postulatum d'Euclide. Nous suivrons la démonstration donnée par Legendre dans la quatrième édition de sa Géométrie.

Théorème. Si deux lignes droites AB, CD, font avec une troisième EF, deux angles intérieurs d'un même côté, dont la somme soit plus petite ou plus grande que deux angles droits, les lignes AB, CD, prolongées suffisamment, devront se rencontrer.

Il suffit de considérer le cas où la somme des angles est plus petite. On tire la ligne FG, de manière que l'angle GFE soit égal à l'angle AEF; la droite FD tombera dans l'angle GFE; toute oblique, telle



que FN, fait avec les deux droites AB et FG, deux angles alternes-internes ENF, GFN, égaux (ce qui est facile à démontrer); si l'on prend EN = EF, il est aisé de voir que l'angle GFN est la moitié de l'angle GFE; prenant ensuite NP = FN, et tirant FP, l'angle GFN se trouve encore divisé par cette dernière droite en deux parties égales; et continuant par le même procédé à diviser les angles en F en deux parties égales,

on doit obtenir un angle GFZ plus petit que l'angle GFD ; or, la droite FZ, par la nature de sa construction, rencontre la ligne AB en un point Z', je suppose; la droite FD doit donc sortir du triangle EFZ', et il faut pour cela qu'elle coupe le côté EZ'.

Cette démonstration est adoptée généralement par tous ceux qui regardent le postulatum d'Euclide comme une conséquence du théorème sur les angles du triangle.

Au point de vue géométrique, elle renferme un postulat dont nous avons parlé page 187, à savoir que la droite FD doit sortir d'un espace limité tel que EFZ'. C'est même ici un cas tout particulier de ce postulat, en ce que la droite FD a déjà un point F commun avec le contour du triangle. Nous ne connaissons que M. Ueberweg qui ait cru nécessaire de prouver ce postulat : il fait remarquer que la droite FN, en se mouvant autour du point F et sur la droite AB, jusqu'à ce qu'elle coïncide avec la droite FZ, passe par tous les points de la surface du triangle NFZ', et par conséquent par un des points de la droite FD, c'est-à-dire qu'il arrive un instant où elle coïncide avec elle (1). Cette démonstration suppose qu'un point qui passe d'un côté d'une droite FD, jusqu'ici censée ne pas sortir du triangle, à l'autre côté de cette même droite, rencontre nécessairement celle-ci, ce qui est précisément le postulat à démontrer.

Mais c'est surtout dans le cas où la droite n'a aucun point commun avec le contour de la figure qui l'enferme, que ce postulat est indémontrable par les principes actuels de la géométrie. Tout au plus pourrait-on dire que, si l'on joint les points de ce contour deux à deux,

(1) Voir *System der Logik*, p. 308.

on a toujours des droites d'une longueur finie, que parmi celles-ci, il en est une qui a une longueur maximum et que la droite donnée, suffisamment prolongée, devant nécessairement dépasser cette longueur, sortira nécessairement aussi du contour. Mais cette démonstration elle-même est peu satisfaisante.

Examinons maintenant la démonstration de Legendre au point de vue logique.

D'abord, elle tombe, et à plus juste titre que les incommensurables, sous le coup de la critique que nous avons dirigée contre ceux-ci. Ici encore, l'argumentation est *ad hominem*. Legendre dit à son contradicteur : Tirez une droite comme vous voulez, dans l'angle GFE, je vous prouverai qu'elle coupe la droite AB. Mais ce contradicteur peut répliquer : Sans doute, je vois que la droite FD, que j'ai prise au hasard, ne répond pas à mon intention; mais si j'en prenais une autre derrière FZ? — Legendre voudra le convaincre en divisant l'angle GFZ en deux parties égales; mais son adversaire divisera, de son côté, l'angle GFD en deux ou même en trois parties égales et davantage, car il est libre de le faire; et les voilà tous deux se poursuivant à l'infini sans jamais parvenir à se rencontrer. A qui restera la victoire? (1).

(1) Quelques-uns voudront voir dans cette critique le sophisme renouvelé d'Achille et la Tortue. Mais la différence est grande : Zénon prétendait qu'Achille qui marchait, soit deux fois, plus vite que la tortue, ne l'atteindrait jamais, parce que, pendant qu'Achille parcourt la distance, soit vingt pieds, qui le sépare de l'animal, celui-ci en parcourra dix ; pendant qu'Achille fera ces dix pieds, la tortue en fera cinq, et ainsi de suite. Ce raisonnement était un sophisme, parce qu'il voulait prouver la fausseté d'une proposition vraie, à savoir que la tortue finirait par être atteinte. Mais Zénon

Ce n'est pas tout : la démonstration ne résout pas même la difficulté dans son essence. Elle prouve, si l'on veut, que toute droite, telle que FD, qui fait un angle *fini* avec FG, coupe la droite AB; mais il s'agit proprement de prouver que par le point F on ne peut mener *qu'une* parallèle à la droite AB; c'est-à-dire que la droite FG ne peut osciller *si peu que ce soit*, autour de sa position, sans rencontrer d'un côté ou de l'autre la droite AB. Or, si loin qu'on pousse la division de l'angle GFM, la droite FZ' fait toujours un angle *fini* avec FG; elle n'atteint pas le *si peu que ce soit*, et c'est ce qu'elle devrait faire.

Il nous reste à montrer que le postulatum d'Euclide a la même origine que tous les autres postulats, c'est-à-dire que l'on a pris un théorème pour une définition; et, comme un théorème, pour être définition, doit être inversible, on a été obligé d'admettre, sous forme d'axiome et sous le nom de postulat, la proposition renversée, ou toute autre équivalente.

Définition : On nomme *parallèles* des droites situées dans le même plan, et qui ne peuvent se rencontrer si loin qu'on les suppose prolongées.

De telles parallèles existent, témoin deux perpendiculaires à une même droite. Mais toutes les droites menées par un point, dans un plan donné, de manière à n'en pas rencontrer une autre, lui sont-elles parallèles? Comme il répugne à la notion intuitive de

---

aurait eu raison de soutenir qu'Achille n'atteindrait *jamais* la tortue, s'il concourait à la condition de ne parcourir dans un temps *donné et toujours le même* que la moitié de l'intervalle qui le séparait d'elle. En effet, dans ce cas, Achille et la tortue s'approchent indéfiniment d'une limite fixe, située à quarante pieds d'Achille, et que ni l'un ni l'autre ne toucheront. — Voir pages 149 et suiv.

plusieurs droites parallèles que deux quelconques d'entre elles fassent un angle, force est bien d'admettre ce postulat, qui permet de faire l'inversion nécessaire :

Par un point on ne peut mener qu'une parallèle à une même droite ;

ou bien :

Deux droites qui se coupent ne peuvent être toutes deux parallèles à une même troisième.

Quelle que soit la définition qu'on adopte, on retombe, d'une manière ou de l'autre, sur ce postulat ou un postulat analogue.

Cependant une définition fait exception. Etant admises l'idée de direction et *la possibilité de tirer une droite dans une direction voulue*, la définition suivante satisfait à toutes les exigences :

Les parallèles sont des droites de directions semblables. La définition est génétique et nominale, et par conséquent inversible; par un point, on ne peut mener qu'une parallèle à une droite donnée; les parallèles ne peuvent se rencontrer. Mais il incombe alors à ceux qui donnent cette définition, de démontrer une proposition importante sur les angles, pressentie par Mill, qui en fait un axiome expérimental.

L'*angle* étant la différence des directions de deux droites qui partent d'un même point, on a à établir l'inverse de cette définition, et ici se retrouve le postulat d'Euclide dans toute sa profondeur. Il faut prouver que :

Deux droites situées dans le même plan et qui n'ont pas la même direction, forment un angle, c'est-à-dire se rencontrent en un point qui est le sommet de l'angle.

M. Ueberweg n'a pas songé à démontrer ce postulat mis sous cette forme; il n'a pas même soupçonné que

c'est là la forme essentielle du postulat d'Euclide ; et il a préféré abandonner sa définition des parallèles pour reprendre le postulat sous son énoncé ordinaire, et au milieu du cortége des propositions concernant les sécantes (1).

Mill admet comme une vérité expérimentale que *les côtés d'un angle vont toujours en divergeant;* et il pose comme vraie la proposition inverse que *deux droites qui, situées dans le même plan, vont toujours en convergeant, se rencontrent.* Libre à lui de la regarder comme une nouvelle vérité expérimentale; mais elle n'est pas impliquée dans la première. C'est un postulat expérimental; car les deux droites peuvent être si éloignées l'une de l'autre, et si peu inclinées l'une sur l'autre, que la vérification expérimentale soit impossible.

Enfin, c'est ici proprement que doit être mentionné le postulat dont nous avons parlé page 186, à savoir que :

Deux parallèles restent chacune du même côté de l'autre.

En effet, il est loin de découler immédiatement de la définition, que des parallèles courent indéfiniment à côté l'une de l'autre; en d'autres termes, que l'une est toujours située au-delà de l'autre, par rapport aux rayons vecteurs qui partent d'un même point de leur plan. C'est là une propriété qui résulte de ce que les lignes, soit équidistantes, soit asymptotes, sont des droites, et qui n'existerait pas dans le cas où elles fussent des courbes.

---

(1) Nous disons que c'est la véritable forme du postulat d'Euclide. Celui-ci ne dit, en définitive, rien autre chose : deux droites qui font avec une même troisième des angles correspondants inégaux, n'ont pas la même direction.



CHAPITRE II.

FONDEMENTS NOUVEAUX DE LA GÉOMÉTRIE.

Ce chapitre est divisé en quatre paragraphes. Dans le premier, nous définissons les notions premières de la géométrie, et nous donnons la solution des postulats que nous avons signalés. Le second est consacré à la théorie de la similitude; le troisième, à la solution d'une difficulté célèbre se rapportant à la mesure du cercle. Un quatrième enfin contient quelques considérations théoriques sur les unités.

§ 1. — DÉFINITIONS PREMIÈRES. — SOLUTION DES POSTULATS.

Si l'on nous a bien compris, on admettra avec nous que les notions du plan et de la droite nous sont données avec celle de l'espace; que ce sont des déterminations décrites d'avance en lui, tandis que les autres déterminations, les cercles, les triangles, etc., y sont décrits arbitrairement par la pensée. Engendrer (1) l'espace, c'est y engendrer en même temps et par la même loi, des plans et des droites. Après avoir mis cette loi de génération en lumière, il nous reste à y rattacher

(1) Toute représentation intuitive d'un tout empirique suppose, de la part de l'imagination, la génération successive des parties de ce tout. — Voir. page 13, la citation d'un passage de Kant sur ce point.

toutes les notions élémentaires de la géométrie, à savoir, celles de *distance*, de *direction*, d'*angles*, de *parallèles*, de *convexité*, de *concavité*, de *symétrie*.

Les définitions que nous en donnerons, reproduiront, autant que possible, l'intuition, l'idée vulgaire que ces mots éveillent. Elles auront ainsi, nous l'espérons du moins, une base à la fois logique et psychologique. Nous démontrerons, en passant, tous les anciens postulats de la géométrie, et même les lemmes que l'on a imaginés pour les démontrer, sans nous astreindre cependant à la forme aride de la géométrie, forme qui ne s'allie pas avec la nature de cet ouvrage.

Si, tout en satisfaisant aux exigences de la géométrie idéale, nous résolvons les difficultés que les anciens principes ne permettaient pas de résoudre; et, bien que nos prémisses soient indépendantes de tout succès dans les résultats, si pourtant les conséquences viennent les confirmer, nous pourrons croire avoir assis la géométrie sur sa véritable base.

De la droite dans l'espace.

Définition. La *droite* est une ligne homogène, c'est-à-dire dont les parties, prises indifféremment, sont semblables entre elles ou ne diffèrent qu'en longueur.

Remarque. Les modes de démonstration des théorèmes qui concernent la ligne droite, consisteront dans la majoration ou la minoration de la figure.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, page 180, nous admettons qu'il y a équation exacte entre l'*intuition* de ligne *droite*, et le *concept* de ligne *homogène*. Naturellement, toutes les conséquences que nous tirerons du *concept*, se vérifieront *intuitivement*;

mais il est nécessaire que nous insistions sur ce point, que l'*intuition* ne viendra jamais que confirmer, justifier ces conséquences, et ne servira pas à les démontrer. Ainsi, la géométrie ordinaire *regarde comme vrai* que deux lignes *droites* coïncident en entier quand elles le font en partie, qu'entre deux points on ne peut tirer qu'une ligne *droite,* etc; elle se fonde sur l'*intuition*. Nous, au contraire, nous *démontrerons* ces mêmes propriétés, en partant du *concept* de ligne *homogène*.

Théorème I. *Une droite est déterminée quand on donne l'une quelconque de ses parties.*

Car la majoration de cette partie reproduit la droite. De là, comme

Corollaire. *Quand deux droites ont une portion commune, elles coïncident dans toute leur étendue.*

Si l'on fait attention à la manière dont cette portion, quand on la majore, reproduit la droite, on verra que ce sont précisément les deux points limites de cette portion qui décrivent la ligne entière, et qu'ils ne décrivent qu'elle seule, l'un de ces points au moins passant à chaque instant par une position nouvelle, de plus en plus écartée de l'autre point. De même, si l'on minore cette même portion, l'un des points limites au moins la décrira pendant cette opération, et ne peut décrire qu'elle seule. Nous pouvons donc regarder comme démontrés les deux théorèmes suivants :

Théorème II. *Entre deux points on ne peut tirer qu'une ligne droite;*

Théorème III. *Une droite ne se bifurque pas.*

Ces deux théorèmes sont le complément l'un de l'autre. On pourrait encore les démontrer directement en engendrant la droite (ligne *homogène*) par la minoration ou la majoration de la figure que forment les

deux points par leur réunion. L'un des points étant pris pour centre (1) de majoration, l'autre, dans son mouvement, décrit une ligne unique.

Corollaire 1. *Deux points déterminent une droite.*

Corollaire 2. *L'élément de la droite se compose de deux points, abstraction faite de l'intervalle qui les sépare.*

Corollaire 3. *Deux droites ne peuvent se rencontrer en plus d'un point.*

Corollaire 4. *Une droite, en tournant autour de deux de ses points, ne sort pas d'elle-même.*

Définition. On nomme *distance de deux points*, la longueur de la portion de droite qui les relie (2).

Remarque. La notion de distance est-elle ou non antérieure à celle de droite? Pour répondre à cette question, il faut se demander laquelle des deux notions implique l'autre, laquelle peut se concevoir sans l'autre.

Peut-on penser à la droite sans penser à la distance? peut-on penser à la distance sans penser à la droite? Il est clair pour nous qu'à la première question on doit répondre *oui*, et à la seconde *non*. C'est à un fait psychologique que nous en appelons, et le lecteur doit juger lui-même si ce fait est tel que nous l'énonçons.

Philalèthe (3) définissait la *distance : l'espace considéré par rapport à la longueur qui sépare deux corps.* Cette définition rentrerait, jusqu'à un certain point, dans

---

(1) Nous entendons par *centre de majoration* le point de l'espace qui reste immobile quand on majore un quantum quelconque.

(2) *Distance*, c'est l'espace, *l'intervalle* d'un lieu à un autre, — se dit aussi du temps.

Intervalle, c'est la *distance* d'un lieu ou d'un temps à un autre.
(*Dictionnaire de l'Académie*).

(3) Leibnitz ; *Nouveaux Essais sur l'entendement humain*, Liv. II, chap. 13.

la nôtre, si, au lieu du mot *longueur* pur et simple, elle contenait les mots *longueur de la droite*; et ces derniers mots sont nécessaires : car, qu'est-ce qu'*une longueur qui sépare deux corps?* Cette longueur n'est autre que la distance, et, pour ne pas faire une tautologie, on a employé un terme impropre.

Théophile corrige la définition de son adversaire : « Pour parler plus distinctement, dit-il, la *distance* de deux choses situées (soit points ou étendues), est la grandeur de la plus petite ligne possible qu'on puisse tirer de l'une à l'autre. Cette distance se peut considérer absolument, ou dans une certaine figure qui comprend les deux choses distantes. Par exemple, la ligne droite est absolument la distance entre deux points. Mais ces deux points étant dans une même surface sphérique, la distance de ces deux points dans cette surface est la longueur du plus petit grand arc de cercle qu'on y peut tirer d'un point à l'autre. » La confusion que fait ici Leibnitz entre la distance et la ligne *minimum*, provient de l'intime connexion qu'il y a entre ces deux idées; la distance est en effet, comme on le sait et comme nous allons le démontrer, la ligne *minimum* par excellence; mais toute ligne *minimum* n'est pas une distance. La distance entre deux villes n'est pas *le plus court chemin* que l'on puisse suivre pour aller de l'une à l'autre, c'est la longueur du chemin fictif qui, perçant les montagnes et s'élevant au-dessus des vallées, conduirait *directement* de l'une à l'autre. Sans doute, par abus de langage, le mot *distance* est quelquefois pris dans le sens de *route minimum*, comme lorsqu'on dit que les deux pôles sont distants de 4500 lieues; mais, nous le demandons encore une fois, est-ce là la représentation fidèle de la *notion* de distance? Nous osons répondre *non*.

« *La grandeur d'un chemin absolument déterminé par deux points*, dit M. Ueberweg, *se nomme leur distance.* »

La ligne droite est absolument déterminée par deux de ses points, et elle est la plus courte de toutes les lignes qui peuvent les rejoindre, elle est donc *la mesure de la distance*.

Au fond, la définition de M. Ueberweg revient à la nôtre, mais nous la croyons fautive au point de vue psychologique. Il a cru pouvoir définir à priori la distance sans-recourir à la notion de droite; mais c'est une illusion : il suffit d'examiner cette même définition pour voir qu'elle a besoin d'une justification. On réfléchit d'abord; on reconnaît que la droite est déterminée par deux points; qu'entre deux points il ne peut y avoir qu'une droite; et l'on voit ainsi, mais en corollaire seulement, que la définition convient à l'idée définie.

THÉORÈME IV. *La plus courte de toutes les lignes qui ont les mêmes extrémités est une ligne droite.*

Car, dans la ligne AB, la plus courte entre A et B, chacune des parties, telle que CD, est nécessairement la plus courte entre les points C et D qui la limitent. Or, l'espace étant homogène, la partie CD, en tant que *le plus court chemin* entre C et D, ne peut différer en forme de la ligne AB, *le plus court chemin* entre A et B. Les parties de cette ligne ont donc la même forme, quelle que soit leur longueur, elles sont semblables entre elles; la ligne elle-même est donc homogène (1).

A —— C —— D —— B

(1) De la même manière, on peut démontrer que la ligne la plus courte entre deux points sur une sphère est un arc de cercle, et par conséquent un arc de grand cercle, puisque, de tous les arcs sous-tendus par la même corde, le plus petit est celui qui appartient au cercle du plus grand rayon. En effet, cette ligne la plus

Comme nous avons démontré qu'entre deux points on ne peut tirer qu'une ligne droite, nous pouvons dire :

Corollaire 1. *La ligne droite est telle que chacune de ses parties est la plus courte de toutes les lignes qu'on peut tirer entre les deux points qui limitent cette partie.* (1).

Il en résulte aussi que :

Corollaire 2. *La distance entre deux points est la plus courte ligne que l'on peut tirer entre ces deux points.*

De là, une connexion intime entre les idées de *distance*, de *droite* et de *plus court chemin*, et la définition générale suivante de la *distance* :

Définition. La *distance entre deux objets* est la droite la plus courte que l'on puisse tirer de l'un à l'autre.

Ainsi la distance d'un point à une droite est la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite, parce que cette perpendiculaire est plus courte que toute autre droite ; la distance entre deux droites de l'espace est leur perpendiculaire commune, parce que cette droite est plus courte que toute autre. Mais, remarquons-le encore une fois, la *distance* est exprimée avant tout par

courte est telle que chacune de ses parties est la plus courte entre les deux points qui la terminent. Or, comme la sphère est une surface isogène, la distance des deux points sur cette ligne restant constante, la ligne qui les relie est toujours égale à elle-même. Cette ligne est donc isogène, et, sur une sphère, une telle ligne ne peut être qu'un arc de cercle.

(1) Il semble que ce soit une puérilité, après avoir démontré que *le plus court chemin entre deux points est une droite*, de n'oser renverser cette proposition et dire : *La droite est le plus court chemin entre deux points.* Pourtant, si entre deux points *plusieurs* droites étaient possibles, il pourrait se faire qu'une seule d'entre elles fût *le plus court chemin*, et l'inversion ne serait plus permise. (Voir page 184.)

une *droite* et non par une ligne quelconque. Ainsi, la distance entre deux points pris sur une sphère, est non l'arc de grand cercle, mais la droite qui les joint.

De la droite dans le plan.

Définition. Le *plan* est une surface homogène.

Théorème V. *Un plan est déterminé quand on donne l'une de ses parties* (1).

Corollaire. *Lorsque deux plans ont une portion commune, ils coïncident dans toute leur étendue.*

On a déjà vu qu'une droite peut s'appuyer sur un plan dans toute son étendue. C'est la conséquence du mode de génération du plan : dans la majoration d'une portion élémentaire de cette surface, les lignes élémentaires de cette portion deviennent des droites. Mais cette conséquence se trouve aussi dans la proposition suivante :

Théorème VI. *L'intersection de deux plans est une droite.*

En effet, la majoration d'une portion de cette intersection devant étendre cette portion à la fois dans les deux plans, engendre l'intersection entière (2).

(1) Nous avons dit plus haut qu'une ligne n'est pas une portion de surface.

(2) Quelques mots de développement ne seront peut-être pas inutiles. Soit *ab* une portion de l'intersection : en tant qu'appartenant au plan P, par majoration elle reste dans le plan P ; de même, elle reste dans le plan Q ; elle se confond donc avec l'intersection des deux plans. Ou bien encore : considérant deux portions de ces plans, avec la portion de ligne où elles se coupent, et majorant cette figure, on engendre les plans entiers et l'intersection entière. — Tous ces modes de démonstration sont fort simples ; mais il faut s'être bien pénétré du principe de l'homogénéité pour en concevoir la puissance et l'application.



Corollaire. *De là suit qu'il peut y avoir des figures rectilignes planes.*

Théorème VII. *Par trois points non en ligne droite, on ne peut faire passer qu'un plan.*

Théorème VIII. *Un plan ne se bifurque pas.*

Ces théorèmes se démontrent d'une façon analogue aux théorèmes correspondants sur la droite : on joint les trois points par des droites ; puis, l'un d'eux étant pris pour centre de majoration, celle des droites qui ne le contient pas, se meut, pendant qu'on majore ou minore l'espace, d'une façon continue sur les deux autres.

Corollaire 1. *Par deux droites qui se coupent, on ne peut faire passer qu'un plan.*

Corollaire 2. *Quand une droite a deux de ses points dans un plan, elle y est contenue tout entière, d'où la possibilité de tracer des figures rectilignes planes.*

Théorème IX. *Toute portion de droite, située dans un plan, si on la prolonge suffisamment, sort de toute figure limitée qui la renferme dans ce plan.*

En effet, si l'on engendre le plan par la majoration d'une figure plane qui ne contienne qu'une partie de la portion de droite, cette figure empiétera nécessairement sur l'autre, ainsi que la portion de droite qui lui est attachée.

Définition. On nomme *direction* d'une droite, la position de cette droite autour d'un de ses points.

Nous ferons ici les mêmes questions que plus haut : Peut-on éveiller l'idée de direction sans éveiller celle de droite ? Ne peut-on pas parler de droite sans faire songer à la direction ? La direction n'est donc pour nous qu'une manière de considérer la droite dans le plan. C'est ainsi que, dans le langage vulgaire, quand on dit qu'*un objet* B *est situé dans une telle direction*, le lieu A de l'observateur sert de pivot, de *pôle*, et la

direction est indiquée par la position du bras (position de la droite), qui tourne autour de ce pôle dans un même plan, et de manière à indiquer l'objet B. On dit encore : *J'ai suivi telle direction*. La droite est alors prise pour une moyenne servant de mesure à la route que l'on a suivie réellement.

Un théorème curieux vient confirmer cet usage du terme de *direction*.

Si l'on nomme *zéro* la direction de la droite qui passe par le point de départ et le point d'arrivée, la somme des changements de direction est nulle, quelle que soit la route suivie.

Sans s'en rendre compte, on admet tous les jours cette proposition comme vraie. La démonstration en est facile. Nous prenons pour négatives les directions en dessous de la direction qui précédait. Il faut prouver que : $a - b + c - d + e = 0$. Or : $a - b = -n$; $e - d = -m$; et : $c = m + n$. C. Q. F. D.

C'est, en définitive, le théorème sur les angles extérieurs d'un polygone, qu'on pourrait énoncer comme suit :

La somme des changements de direction de tous les côtés, moins un, d'un polygone est égale à la direction de ce côté.

La *direction* est ce qui distingue une droite de toute autre droite qui la coupe ; c'est elle, en un mot, qui donne le caractère *individuel* de la droite.

M. Ueberweg a essayé de la définir à priori. Nous croyons qu'il y a là une erreur psychologique. Nous avons précédemment critiqué cette définition ; ici, nous ferons remarquer que cet auteur a eu tort de considérer la droite comme située dans l'*espace*, au lieu de la sup-

poser, comme nous, dans le *plan*. Outre des considérations d'analyse qui s'opposent à cette manière d'envisager la *direction*, on se trouve bientôt en face d'une difficulté insurmontable, quand, définissant l'angle *la différence de deux directions*, on est obligé d'expliquer comment deux droites qui font, dans l'espace, le même angle avec une même troisième, peuvent faire un angle entre elles.

DÉFINITIONS. Si, par un point donné dans un plan, on fait passer toutes les droites possibles, on a ce que nous nommons la *rose des directions*, et le point donné en est le *pôle*.

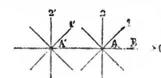
THÉORÈME X. *Toutes les roses des directions sont semblables, et à chaque direction de l'une correspond une direction de l'autre.*

Cette proposition est une conséquence de l'homogénéité du plan.

Toute détermination nouvelle et, par sa nature, susceptible de variation, demande une mesure, une règle, une détermination fixe prise pour *unité*, et que, pour le cas qui nous occupe, nous nommerons *norme*. Dans toute rose de directions, nous devons donc prendre une direction arbitraire pour norme et lui rapporter toutes les autres. Cette direction particulière nous la nommerons la direction 0.

THÉORÈME XI. *La majoration du plan ne change pas la direction de ses droites.*

En effet, si l'on majore le plan du point B situé sur la ligne des pôles AA', et pris comme centre de majoration, le point A se transporte en A', emportant la rose avec lui ; la



direction de la norme A0 n'a pas changé, et, par conséquent, les autres directions se correspondent encore (théorème X).

Remarque. A cette démonstration on objectera peut-être que, dans le transport de la rose A en A′, la droite 1 peut avoir pris la position de la droite 2, et réciproquement. Ce saut est incompatible avec l'*homogénéité* du plan. Toutefois, nous pouvons offrir une seconde démonstration qui est à l'abri de ce reproche, mais où cet avantage est compensé par un peu plus de longueur. La voici :

Si nous majorons l'angle 0A1, du point A comme centre de majoration, et dans un rapport donné, cet angle ne change pas de valeur, ni ses côtés de position. Majorons-le maintenant, dans ce même rapport, du point B situé sur l'un de ses côtés, et pris comme centre de majoration, l'autre côté se transportera en A′ 1′, par exemple; or, les angles résultant de ces deux opérations sont égaux, puisqu'ils ont même forme et même grandeur ; donc l'angle 0A′1′ est égal à l'angle 0A1, et les directions A1 et A′1′ sont les mêmes.

De l'angle et des parallèles.

Définitions. La figure formée par deux droites qui partent d'un même point se nomme *angle* ; les droites sont les *côtés* de l'angle, et le point dont elles partent en est le *sommet*. La *valeur* (1) de l'angle est la différence de la direction de ses côtés.

(1) Nous évitons d'employer le terme de *grandeur* en parlant de l'angle pour des raisons que nous dirons bientôt.



Ainsi la valeur de l'angle B A C est la différence des directions A B et A C. Cela suppose donc qu'on a une unité pour mesurer cette différence, une *unité-différence*, ou un *angle-unité*. On sait qu'on prend généralement à cet effet l'angle droit ou l'angle d'un degré.

Tout ce qui précède est conforme aux usages vulgaires que l'on fait des directions et des angles; on sait que sur le cercle on marque un 0 ou point fixe; puis l'on désigne chacune des droites qui partent du centre, par les chiffres 1, 2, 3.... jusque 360, et l'on apprécie par là la valeur plus ou moins grande de l'inclinaison. Nous allons voir comment l'on construit ces divisions.

Théorème XII. *Deux angles sont égaux quand ils ont la même valeur.*

C'est, en effet, le seul cas où ils se superposent.

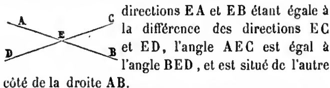
Étant donc pris un angle, on le promène à partir de la direction A O, en ayant soin qu'un même côté se place successivement dans la direction de l'autre. L'angle que l'on prend est de préférence une partie aliquote du plus grand écart de direction, qui est quatre angles droits, ainsi qu'il résulte de ce qui suit.

Définitions. Une droite est susceptible d'être parcourue en deux sens différents; et la différence de ces deux directions contraires est constante pour toutes les droites. La moitié de cette différence constitue la valeur de l'*angle droit;* et les deux côtés d'un angle droit sont dits *perpendiculaires* l'un à l'autre ; dans toute autre position ils sont *obliques*, et l'angle est dit *obtus* ou *aigu* suivant qu'il est plus grand ou plus petit qu'un droit. Il va de soi que les angles droits sont tous égaux.

De là la proposition suivante :

Théorème XIII. *Lorsqu'une droite en rencontre une autre, elle passe à l'autre côté de cette autre, et les angles opposés par le sommet sont égaux.*

Soient les deux droites AB et CD ; la différence des directions EA et EB étant égale à la différence des directions EC et ED, l'angle AEC est égal à l'angle BED, et est situé de l'autre côté de la droite AB.



Théorème XIV. *Quelle que soit la direction prise pour norme, la valeur de l'angle reste la même.*

Cette proposition, évidente par elle-même, contient comme corollaire que l'angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des deux intérieurs qui lui sont opposés.

Soit la droite BC prise pour norme ; la direction de AC est mesurée par l'angle ACO ; la direction de AB par l'angle ABO ; la différence de ces deux directions, qui est l'angle BAC, est égale à la différence des directions ACO et ABO. On a encore : BAC + ABC = ACO ; et ajoutant l'angle ACB de part et d'autre, il vient :

$$BAC + ABC + ACB = ACO + ACB = 2 \text{ droits.}$$

Ainsi se démontre sans difficulté ce théorème si difficile à démontrer par les principes ordinaires. Il est inutile de faire remarquer que par là est aussi validée la démonstration de cette proposition au moyen de la rotation des côtés d'un triangle autour des sommets, et de leur translation le long d'eux-mêmes. (Voir page 214.)

Passons maintenant à la démonstration des théorèmes sur la forme de l'angle, et de la proposition de Mill, que l'écart des deux côtés d'un angle va en s'agrandissant de plus en plus.

Théorème XV. *Les angles semblables* (1) *sont égaux.*

En effet, par la majoration on ne change pas la direction des droites; la valeur de l'angle reste donc la même; et, comme des angles qui ont même valeur sont égaux, les angles majorés, qui sont semblables à l'angle primitif, lui sont aussi égaux.

Cette proposition est importante, et elle laisse pressentir que, dans la théorie des figures semblables, nous pouvons poser comme principe que celles-ci ont leurs angles homologues égaux. C'était déjà d'ailleurs un corollaire du théorème XI (2).

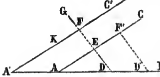
Théorème XVI. *Les côtés d'un angle vont en s'écartant de plus en plus, à mesure qu'on s'éloigne du sommet, cet écartement étant mesuré par la longueur des portions de droites interceptées et ayant même direction.*

---

(1) On ne doit pas oublier que les figures semblables s'obtiennent par la majoration de l'une d'entre elles.

(2) On comprend maintenant pourquoi nous n'avons pas voulu nous servir de l'expression usitée *grandeur d'un angle.* C'est que, dans l'angle, la grandeur n'est pas opposée à la forme; mais l'une c'est l'autre; les angles d'une forme donnée ne sont pas, les uns plus grands, les autres plus petits; ils sont égaux. Nous n'avons pas à parler non plus d'angles équivalents; les angles équivalents sont égaux. La grandeur ne peut jamais appartenir qu'à des quantums limités; aussi, on ne parle jamais de la grandeur des paraboles, des hyperboles, etc. Avant d'évaluer la surface de ces courbes, on les limite dans tous les sens d'après certaines conventions. D'ailleurs, rien n'empêche de se servir des expressions de *grand* et de *petit* angle, maintenant qu'on a eu soin de montrer que ce n'est pas là une grandeur de même nature que celle des figures fermées.

Soit un angle BAC, et par le point D tirons une droite DG de direction arbitraire. Majorons la figure



en partant du point D comme centre de majoration : le point A glisse sur la droite AB et vient, supposons-nous, en A', A'D étant le double, par exemple, de AD ; AC a reculé en A'C', en conservant la même direction. (Donc, pour le dire en passant, la droite AC, dans son mouvement, n'a jamais eu de point commun avec la position précédente ; sans quoi elle aurait fait un angle, c'est-à-dire une différence de direction, avec cette même position.) Le point E s'est mû le long de la droite DG et est arrivé en F, de manière que DF soit le double de DE. Quant à l'angle C'A'B, il est resté le même (théorème XV). Si donc on le fait maintenant coïncider avec son égal CAB, le point D viendra tomber en D', le point F en F' ; les deux droites DE et D'F' ont la même direction, et l'une est la moitié de l'autre.

Si nous avons supposé que AD était doublé en A'D, c'était pour aider l'imagination. Quelle que soit la proportion, on voit que l'on a toujours : AD' : AD = D'F' : DE ; ce qui était à démontrer.

Définitions. Les droites qui ont même direction sont dites *parallèles*. Toute droite qui rencontre des parallèles se nomme *sécante*.

Théorème XVII. *Deux parallèles font avec une même sécante des angles correspondants égaux.*

Cette proposition est évidente, et elle sert de base à la solution du problème qui consiste à mener par un point une parallèle à une droite.

Dans le courant de la démonstration du théorème XVI,

nous avons fait remarquer que la droite AC, dans son mouvement, ne coupe jamais sa position précédente; nous pouvons donc regarder comme démontrée la proposition suivante que nous avons signalée parmi les postulats :

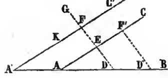
Théorème XVIII. *Quand une droite est parallèle à une autre, elle est tout entière du même côté de cette autre.*

Théorème XIX. *Deux parallèles ne peuvent se rencontrer si loin qu'on les suppose prolongées.*

Car sans cela elles formeraient un angle.

Théorème XX. *Deux droites qui n'ont pas même direction se rencontrent.*

Cette proposition est le postulatum d'Euclide sous une forme un peu différente. Soient BA et C'K deux droites de directions différentes. Par le point A quelconque de la droite AB tirons une droite AC, qui ait la même direction que KC'; et par un point F pris arbitrairement sur KC' et le point D pris arbitrairement sur AB, tirons une droite indéfinie DG. Si nous majorons la figure en partant du point D comme centre, le point A se mouvra le long de BA; la droite AC s'avancera d'un mouvement continu vers la droite KC', jusqu'à ce qu'elle se confonde avec elle; et à ce moment le point A est en A' sur la droite BA; la droite C'K prolongée vient donc tomber en A'. Quant à la droite AC, elle rencontre toujours KC'; car il suffit pour cela de majorer la figure dans le rapport de DE à DF.



Remarque. Les démonstrations des propositions XVI et XX sont un peu longues; mais il est facile de voir

qu'elles sont immédiates, et que leur longueur provient de la nécessité où nous nous trouvons d'insister sur tous ces principes nouveaux auxquels on n'est pas habitué en géométrie. Nous pouvons, en effet, nous contenter de dire : En majorant la figure de manière que A glisse le long de BA, on voit que AC finira par coïncider avec KC′, sans cesser de couper le côté AB.

Corollaire 1. *Deux droites qui, situées dans le même plan, ne peuvent se rencontrer si loin qu'on les suppose prolongées, sont parallèles.*

C'est une conséquence des deux propositions précédentes. (Voir, dans le livre précédent, la théorie des inverses et des réciproques.)

Corollaire 2. *Lorsqu'une droite a de ses points des deux côtés d'une autre droite, elle coupe celle-ci.*

Car si elle ne la coupe pas, elle ne la rencontre pas (théorème XIII), et reste toute du même côté de cette droite (théorème XVIII), ce qui est contraire à l'hypothèse.

Théorème XXI. *Deux parallèles sont équidistantes.*

On sait combien il est facile de démontrer cette proposition. Mais nous allons en démontrer l'inverse qui sert de base à la théorie de M. Lamarle sur les parallèles, et qui lui a coûté des efforts si laborieux.

Théorème XXII. *Toute ligne équidistante d'une droite est une droite, la distance étant marquée par la longueur fixe d'une portion de droite d'une direction constante.*

En effet, soit CD une ligne équidistante de la droite AB, et soient mp, nq, etc., des portions de parallèles servant à mesurer les distances. Majorons une portion $mnpq$ de la figure dans le sens de AB, de

manière que *mn* s'étende sur AB, on voit que *pq* s'étend le long de CD ; la ligne CD est donc une ligne *homogène*, c'est-à-dire une droite.

Remarque. Le mode de démonstration est, comme on le voit, toujours le même; et, à la rigueur, il eût suffi de faire remarquer que la majoration d'une portion de la ligne équidistante engendre la ligne entière.

Théorème XXIII. *D'un point pris sur une droite ou en dehors d'une droite, on ne peut mener à celle-ci qu'une oblique faisant avec elle un angle donné.*

(L'angle est naturellement pris dans le même sens.)

Cela est évident : la direction BO étant prise pour norme, les droites AB et AC qui ont des directions différentes ne peuvent faire le même angle avec BO.

Corollaire. *D'un point on ne peut mener qu'une perpendiculaire à une droite.*

De la convexité et de la concavité (1).

La définition ordinaire du terme *convexe* est celle qu'en donnent Legendre et M. Blanchet :

Un polygone convexe est un polygone situé entièrement d'un même côté de la direction de chacun de ses côtés.

1° Cette définition ne répond pas immédiatement à

(1) *Convexe* se dit, par opposition à Concave, d'une surface *bombée* sphériquement (pourquoi *surface?* pourquoi *sphériquement?*) ;

Bomber, rendre *convexe.*

Concave se dit, par opposition à Convexe, d'une surface *creusée* sphériquement ;

Creuser, c'est faire un *creux*;

Creux, c'est une *cavité;*

Cavité, c'est un *creux.*

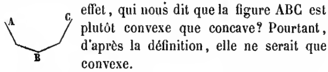
(*Dictionnaire de l'Académie.*)

l'idée qu'on se fait de la convexité. En effet, avant de l'admettre, on se figure une ligne convexe en général, et l'on vérifie *expérimentalement* sur elle la vérité de la proposition qui apparaît ainsi comme un *théorème.*

2° De là suit que la définition est aussi en quelque sorte négative : elle permet, étant donné un polygone, de reconnaître s'il est convexe ou non ; mais il faut un raisonnement pour construire d'après elle un polygone convexe.

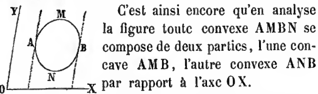
3° Elle définit un polygone et non une ligne fermée ou non fermée ; de plus, elle entend la convexité d'une figure rectiligne, et non d'une ligne courbe, en général, dont la convexité ne peut se définir ensuite qu'au moyen de la tangente.

4° On est forcé de passer sous silence la notion de *concavité*, dont la place serait tout aussi bien ici. En



effet, qui nous dit que la figure ABC est plutôt convexe que concave? Pourtant, d'après la définition, elle ne serait que convexe.

5° Elle est donc fausse, puisque cette ligne ABC est aussi bien concave que convexe.



C'est ainsi encore qu'en analyse la figure toute convexe AMBN se compose de deux parties, l'une concave AMB, l'autre convexe ANB par rapport à l'axe OX.

6° De là suit que Legendre et M. Blanchet ne peuvent donner la définition du *point d'inflexion*, définition fautive aussi en analyse où on le signale comme le point où une ligne change sa courbure, de concave devient convexe, ou inversement ; d'où il résulterait, à la ri-

gueur, que les points A et B seraient des points d'inflexion.

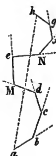
La *concavité* et la *convexité* sont relatives au lieu de l'observateur : quand on regarde une sphère à l'intérieur, on la voit *concave*; quand on la regarde à l'extérieur, on la voit *convexe*. Pour un observateur placé entre les deux cercles A et B, le cercle A paraîtrait *concave* et le cercle B *convexe*. Ainsi l'on peut dire, en général, que,

La négative d'une figure est toujours d'une courbure différente.

Le changement de direction peut avoir lieu dans deux sens ; c'est une conséquence de ce qu'une même droite sert pour deux directions opposées, différant de 180°. Il y a le sens de *droite à gauche* et celui de *gauche à droite*.

Définitions. Une ligne est dite *concave* ou *convexe* quand le changement de direction de ses éléments a toujours lieu dans le même sens; l'un des sens étant pris pour marque de la convexité, l'autre l'est pour marque de la concavité. Le *point d'inflexion* est celui où la ligne de concave devient convexe, ou inversement.

Ainsi la ligne polygonale *a b c d* M *e* N *f g h* change toujours sa direction dans le même sens de *a* jusqu'en M, c'est-à-dire qu'une personne qui marcherait le long de cette ligne tournerait depuis *a* jusqu'en M, toujours de la droite vers la gauche; en M, *point d'inflexion*, le changement de direction ayant lieu désormais de la gauche vers la droite. Si l'on a appelé *convexe* la première partie de la ligne, celle-ci passe



en M de la *convexité* à la *concavité ;* en N est un nouveau *point d'inflexion*, la ligne repasse de la *concavité* à la *convexité*. Nous avons vu plus haut que la somme des changements de direction par rapport à la droite *a h* prise pour norme est nulle, ce qui est conforme au langage ordinaire, qui dit qu'une ligne telle que *ab...g h* va dans la direction *a h*.

Abusivement, on n'emploie que le terme de *convexe* pour désigner la courbure d'une ligne *fermée* qui change constamment de direction dans le même sens.

De là les propositions suivantes :

Théorème I. *Si sur le périmètre d'une ligne fermée convexe on prend deux points et qu'on les joigne par une ligne droite, cette portion de droite est tout entière située à l'intérieur de la figure positive (et à l'extérieur de la figure négative, pour laquelle d'ailleurs le périmètre serait concave).*

Cette proposition facile à démontrer, définit complétement la convexité des figures fermées; il en est de même de la suivante qui n'est autre que la définition de Legendre :

Théorème II. *Toute figure fermée convexe est tout entière située du même côté de la droite qui passe par l'un des éléments de son périmètre.*

Nous nous abstenons de parler de la *convexité* et de la *concavité* des surfaces, notions qui sont soumises à des règles un peu différentes, mais faciles à établir (1).

---

(1) Pour être complet, donnons encore la définition, si utile en analyse, de la convexité et de la concavité relatives.

Une courbe est dite *tourner sa concavité ou sa convexité vers une droite Ox*, suivant que la direction de ses éléments se rapproche ou s'éloigne d'une autre direction fixe Oy, inclinée sur Ox.

La convexité et la concavité peuvent aussi être relatives à un point:

De la Symétrie (1).

Définition. Deux figures sont dites *symétriques*, quand elles sont composées des mêmes éléments, et que ceux-ci sont disposés en sens inverse chez l'une et chez l'autre.

Soit *m n* un élément d'une figure ; l'élément suivant *mq*, déterminé par sa longueur et sa direction (son angle) par rapport à *mn*, peut se placer suivant *mq* ou suivant *mq'*, d'après le sens de cette direction : *mq* est dit symétrique de *mq'*; et les deux figures *nmq* et *nmq'* sont dites symétriques. — Il est facile d'étendre ce qui précède aux surfaces, en remplaçant les éléments linéaires par des éléments de surface.

Voici la définition ordinaire de la symétrie :

Deux figures planes sont symétriques lorsque tous leurs points sont à égale distance d'une droite fixe prise pour axe de symétrie.

Deux solides sont symétriques par rapport à un plan, lorsque chaque point de l'un a son symétrique dans l'autre. Deux points sont dits symétriques par rapport à un plan, quand celui-ci est perpendiculaire au milieu de la ligne qui les joint.

---

la courbe est *convexe*, quand la direction de ses éléments se rapproche continuellement de celle des rayons vecteurs (rayons visuels) passant par le pôle P; *concave*, quand cette direction s'en éloigne.

(1) *Symétrie*, proportion et rapport de grandeur et de figure que les parties d'un corps naturel ou artificiel ont entre elles et avec le tout. (*Dict. de l'Académie.*

Nous avouons ne pas connaître de corps naturel ou artificiel qui ne soit pas *symétrique* en ce sens.

1° C'est une définition par une propriété, c'est-à-dire peu intuitive : on a l'idée de la symétrie avant celle de sa propriété. Tout le monde sait que les deux mains sont symétriques, et cependant on en reconnaîtrait difficilement la symétrie par cette définition, qui tout au plus pourrait s'appliquer aux deux moitiés du corps.

2° Cette définition confond la disposition symétrique avec la symétrie elle-même : deux mains sont symétriques quand bien même leurs points ne seraient pas à égale distance d'un plan fixe pris pour axe de symétrie. De sorte que la définition n'est inversible que par l'addition d'un *peut.*

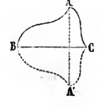
Notre définition permet, en outre, de démontrer facilement ces deux propositions, qui sont du domaine vulgaire :

Théorème I. *Deux figures planes symétriques sont superposables par rabattement;*

Théorème II. *Deux surfaces symétriques le sont par retournement.*

Retourner une figure, c'est faire de sa face interne sa face externe, et inversement.

Dans la géométrie élémentaire, on se sert toujours de la première proposition sans l'avoir démontrée ni même énoncée. Dans la géométrie des solides, on ne parle pas de la seconde, laissant ainsi sans explication comment il se fait que le gant de la main droite peut, après retournement, s'appliquer sur la main gauche.



Le rabattement peut se remplacer de même par le retournement. Si je retourne la figure BAC comme un gant, c'est-à-dire en tirant le sommet A et l'amenant en A', j'obtiens la symétrique de BAC.

La démonstration de ces deux théorèmes repose sur les propositions suivantes, qui ne sont que des corollaires de la définition de la symétrie :

Lemme I. *La symétrique de la symétrique d'une figure reproduit cette figure.*

Lemme II. *Dans toute figure les deux faces sont symétriques.*

Ainsi, pour nous servir d'une image, si l'on trace sur une vitre une figure, suivant qu'on regarde celle-ci d'un côté ou de l'autre de la vitre, ses parties prennent pour l'œil une disposition inverse.

Le rabattement des figures planes est justifié par la même considération. La *symétrique* de la figure BAC est tout aussi bien sa face de dessous que la figure BA'C. Cette face de dessous est donc égale à la figure BA'C; car deux *symétriques* d'une même figure sont égales. C'est là l'essence du rabattement : quand je fais tourner la figure BAC autour de BC comme charnière, de manière à ce qu'elle vienne tomber sur la figure BA'C, la face supérieure de BA'C coïncide avec la face inférieure de BAC, et sa face inférieure coïncide avec la face supérieure de celle-ci.

Il est inutile, pensons-nous, de chercher à justifier la définition ordinaire de la *symétrie;* il résulte immédiatement de la nôtre, que deux figures placées *symétriquement* sont *symétriques.*

De plus, grâce à notre définition, il n'est plus besoin d'un si grand nombre de propositions (Blanchet, livre VI; XX à XXV), pour établir cette autre, pour ainsi dire, évidente par elle-même : que deux figures symétriques sont équivalentes. Toute démonstration qui démontre une chose évidente par des raisonnements laborieux, trahit un vice dans les principes, et doit,

autant que possible, être remplacée. C'est ici le cas. Notre définition de deux figures symétriques, indiquant qu'elles ne diffèrent que par la disposition des parties, il s'en suit immédiatement que des figures symétriques sont équivalentes, et même égales, *car elles ont même grandeur et même forme*. Il est vrai que l'une est à gauche ce que l'autre est à droite ; mais ce n'est qu'une relation tout extérieure, une relation à l'observateur, que cet observateur soit personnifié à l'intérieur ou à l'extérieur de la figure, ou qu'il soit la figure elle-même, ou l'une de ses parties personnifiées (1).

§ 2. — DES FIGURES SEMBLABLES.

Nous avons vu que la définition de la figure doit être génétique, et ne contenir ni trop, ni trop peu d'éléments de description. Mais ce que nous en avons dit a trait seulement à la figure *genre*, et non à la figure *individu*. Nous nous expliquons. La définition du triangle, par exemple, dit que c'est *une figure fermée à trois côtés rectilignes*. Cette définition comprend tous les triangles possibles. Il s'agit maintenant de savoir comment je puis décrire, définir un triangle particulier, ce triangle-*ci* à l'exclusion de ce triangle-*là*. Il ne faudrait pas répondre que le triangle est déterminé comme individu, quand, au lieu de laisser les côtés quelconques, on en donne la longueur. C'est vrai pour le triangle, mais ce ne serait plus vrai pour un quadrilatère ou un

(1) Il est remarquable que les polygones réguliers *pairs* jouissent, au point de vue de la symétrie, de propriétés différentes des polygones réguliers *impairs* : les premiers pouvant se diviser en deux parties *égales*, les seconds ne le pouvant qu'en parties *symétriques*.

polygone en général, en un mot, pour toute figure fermée de plus de trois côtés rectilignes. Il ne suffit donc pas de déterminer, d'individualiser les éléments contenus dans la définition du genre, pour déterminer l'individu. Or, comme le géomètre étudie le genre dans l'individu, il faut qu'il sache distinguer ce qui appartient au genre de ce qui appartient à l'individu. La question à résoudre est donc la suivante :

Supposé connue la description du genre, comment décrire l'individu?

La restriction, *supposé connue la description du genre,* est nécessaire, et l'on doit y faire attention.

Or, la description doit être telle que par son moyen on puisse obtenir l'individu et n'obtenir que lui seul. En d'autres termes, il faut que tous les individus que l'on pourrait décrire sur la même définition individuelle, soient égaux entre eux.

Les conditions d'égalité de la figure sont donc les éléments individuels de la description.

Donnons des exemples :

1) Deux triangles sont égaux, quand ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.—Donc la longueur des trois côtés détermine l'individualité du triangle.

2) Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun. — Donc un angle et la longueur des côtés adjacents déterminent un triangle.

3) Deux triangles sont égaux quand ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun. — Donc un côté et les angles adjacents déterminent un triangle.

4) Deux cercles sont égaux, si leurs rayons sont égaux. — Donc le rayon détermine le cercle.

5) Deux ellipses sont égales, si leurs axes sont égaux chacun à chacun;

6) Si deux diamètres conjugués, égaux chacun à chacun, comprennent le même angle;

7) Si la distance focale et la somme des rayons vecteurs sont égales chacune à chacune.

8) Deux ellipsoïdes sont égaux, si leurs axes sont égaux chacun à chacun.

Donc les axes, deux diamètres conjugués et leur angle, l'excentricité et le grand axe, déterminent une ellipse; les trois axes déterminent un ellipsoïde.

En résumé, les éléments individuels d'une figure forment en elle une figure particulière, qui est, si nous pouvons employer cette expression, le *squelette* sur lequel viennent s'appliquer les chairs d'après la loi qui préside au genre (1).

Pour le triangle, cette loi est : 1) que les côtés se touchent deux à deux; 2) que la figure soit fermée par le troisième côté; 3) que les deux autres côtés se placent dans la direction des côtés des angles.

Pour le cercle 4) que l'une des extrémités du rayon mobile passe toujours par le centre.

Pour l'ellipse, la loi est représentée par l'équation 5) $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$; 6) $a'^2y^2+b'^2x^2=a'^2b'^2$; 7) par la condition que la somme des rayons vecteurs partant des foyers, soit constante.

Pour l'ellipsoïde 8) par l'équation : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

(1) On doit bien faire attention que le squelette ne contienne pas plus qu'il n'est nécessaire. Ainsi, dans la génération des sections coniques au moyen de deux cercles fixes, sur lesquels roule un troisième cercle variable de rayon, il ne faut pas regarder le squelette comme composé des rayons et de la distance des centres,



Cela établi, voici deux théorèmes généraux de la plus grande importance.

Définition. Nous entendons par *figures de même espèce*, les figures semblables dans le même genre.

Théorème I. *Les figures de même espèce ont leurs squelettes semblables* (*de même espèce*).

C'est un corollaire qui découle du théorème fondamental sur la forme, et de la génération des figures de même espèce. Pour engendrer celles-ci, en effet, il suffit de majorer ou de minorer un individu quelconque; or cette majoration portant proportionnellement sur toutes les parties, le squelette est majoré aussi dans le même rapport.

Théorème II. *Les figures de même genre qui ont leurs squelettes de même espèce, sont semblables* (*de même espèce*).

En effet, en majorant convenablement ces figures, on rend leurs squelettes égaux, ce qui les fait devenir elles-mêmes égales. Or, les figures qui deviennent égales par majoration sont des figures semblables. De là, comme corollaires, les deux théorèmes suivants :

Théorème III. *Les figures dissemblables ont leurs squelettes dissemblables.*

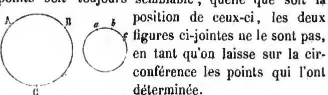
Théorème IV. *Les figures qui ont leurs squelettes dissemblables sont dissemblables.*

Mais à l'occasion de ce dernier théorème, nous devons rappeler ce que nous avons dit du paradoxe

---

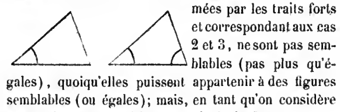
mais comme formé de la somme ou de la différence de ces rayons, pour l'ellipse et l'hyperbole; du rayon augmenté de la moitié de l'excès de la distance du centre à la droite fixe sur le rayon, pour la parabole. — Voir d'ailleurs ce que nous allons dire du paradoxe géométrique.

géométrique à propos du cercle circonscrit à un triangle, ou du cercle en tant que déterminé par trois points. Bien que la figure déterminée par ces trois points soit toujours semblable, quelle que soit la



position de ceux-ci, les deux figures ci-jointes ne le sont pas, en tant qu'on laisse sur la circonférence les points qui l'ont déterminée.

C'est que le squelette fait corps avec la figure elle-même. Ainsi encore les deux figures ci-jointes for-



mées par les traits forts et correspondant aux cas 2 et 3, ne sont pas semblables (pas plus qu'égales), quoiqu'elles puissent appartenir à des figures semblables (ou égales); mais, en tant qu'on considère le squelette comme faisant partie de la figure, on ne pourrait pas dire que ces deux figures sont égales.

L'exemple suivant, pris dans une partie plus élevée de la science, est parfaitement concluant.

Deux hyperboloïdes semblables ont leurs axes semblables; et ils ont aussi leurs directrices semblables.

Deux byperboloïdes sont semblables, s'ils ont leurs trois axes semblables, et encore s'ils ont trois de leurs directrices semblablement placées.

Deux hyperboloïdes sont dissemblables si leurs trois axes sont dissemblables.

Et pourtant on ne peut pas dire :

Deux hyperboloïdes sont dissemblables si leurs trois directrices sont dissemblables.

Mais, si au lieu de considérer l'hyperboloïde pur et simple, on le considère en tant que renfermant en lui

les axes et les directrices, ces deux dernières propositions sont vraies au même titre. Seulement la première est toujours vraie, parce que les axes forment une figure déterminée dans l'hyperboloïde, tandis qu'il n'en est pas de même des directrices qui sont prises arbitrairement sur la surface, comme les trois points sur la circonférence du cercle.

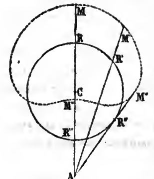
Le quatrième théorème donne toujours lieu à un paradoxe; mais comme ce théorème est de sa nature tout négatif et que son emploi est par là même peu fréquent, pour ne pas dire nul, on ne doit pas s'y arrêter. Toutefois, c'est ce même paradoxe qui explique la nature toute particulière de la similitude en géométrie analytique, où les axes forment une figure qu'on ne peut abstraire de la figure totale qu'au moyen du changement de certaines quantités dans l'équation de la figure. Deux courbes, en effet, ne sont pas égales quand leurs équations sont identiques, car il faut en outre qu'on prenne le même système d'axes. Ce point étant facile à développer, nous ne nous en occuperons pas davantage.

Théorème V. *Le squelette peut toujours se ramener à des lignes droites faisant entre elles de certains angles.*

Corollaire 1. *Comme les angles semblables sont égaux, et que les lignes de deux figures semblables sont proportionnelles, les conditions de similitude seront ramenées à l'égalité des angles et à la proportionnalité des côtés de ces angles.*

Le théorème est évident à priori. Si l'on considère une courbe quelconque, elle est donnée par son squelette et sa loi de génération; le squelette est nécessairement plus simple que la courbe; comme la similitude de deux courbes de ce genre a été ramenée à celle de

leurs squelettes, on a supprimé, dans l'étude de cette similitude, une loi de génération. Maintenant, le squelette peut être lui-même une courbe; mais celle-ci, se ramenant à son squelette, et la loi de sa génération étant mise de côté, le squelette de la figure primitive va se simplifiant de plus en plus; et comme, en définitive, une courbe, si compliquée qu'elle soit, est donnée par *un nombre fini* de lois de génération, on ramène son squelette à une figure composée de longueurs en ligne droite, et des dispositions de celles-ci, c'est-à-dire des angles que ces droites font entre elles.



Considérons la courbe pointillée ci-contre, dont voici la loi de génération :

On décrit un cercle de rayon CR; on prend un point A dans le plan de ce cercle, puis l'on fait mouvoir une droite AM, qui coupe le cercle en différents points R, R', R'', R''', etc., et l'on prend toujours les droites RM, R'M', R''M''; R'''M''' égales à une longueur donnée.

Deux de ces courbes seront égales évidemment quand le cercle et les quantités AC et RM seront les mêmes. Mais le cercle lui-même est donné par son rayon; le squelette se réduit donc à ces trois longueurs; et nous pourrons poser comme conditions de similitude la proportionnalité de ces trois longueurs. Quant à la disposition, elle est donnée en ce que le centre C doit se trouver à l'extrémité de AC, et que la longueur RM doit être prise sur le prolongement du rayon; mais cette disposition même est déjà une loi; et nous pouvons dire

que l'angle lui-même est une loi de disposition, de génération, d'où, en analyse, l'emploi des termes d'*angle de contingence*, *angle de torsion*, qui indiquent la disposition des éléments d'une courbe.

De là :

Corollaire 2. *Toute figure dont le squelette se compose d'une seule longueur* (1) *appartient à un genre espèce, c'est-à-dire que toutes les figures de ce genre sont semblables.*

Ainsi se trouvent démontrées les propositions suivantes, indémontrables par la méthode synthétique à moins qu'on n'emploie les infiniment petits ou les limites :

Deux cercles sont toujours semblables, car le squelette du cercle se réduit à son rayon.

Deux sphères sont toujours semblables.

Deux paraboles sont toujours semblables, car une parabole est déterminée par la distance de son foyer à la directrice.

Deux cycloïdes sont toujours semblables, car la cycloïde est déterminée par son cercle générateur, et celui-ci l'est par son rayon.

---

(1) Nous avions d'abord voulu employer l'expression de *paramètre*, mais nous nous serions exposés à des confusions en géométrie analytique. En effet, toute courbe de la forme : $F(x, y, a) = o$ n'est pas nécessairement une courbe d'un genre espèce, parce que cette équation comprend, entre autres, celles de la forme : $F(x, y, fa) = o$. Le cas suivant est très-simple : l'équation : $a^2 y^2 + a x^2 - a = o$ qui ne dépend que du seul paramètre a, peut cependant représenter une ellipse ou une hyperbole, suivant que a est positif ou négatif. C'est que a^2 est lui-même fonction de a et comprend un nouveau paramètre, à savoir : 2.

Quel que soit d'ailleurs le nom qu'on donne aux parties du squelette d'une figure, notre théorie ne peut donner lieu à aucune confusion.



Tous les polygones réguliers du même nombre de côtés sont semblables car ils sont déterminés par la longueur seule de ce côté.

Il est inutile de multiplier ces exemples.

Si nous passons aux cas plus compliqués, nous pouvons dire à priori :

1) Deux triangles sont semblables, quand ils ont les trois côtés proportionnels ;

2) Quand ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels ;

3) Quand ils ont deux angles égaux.

5) Deux ellipses sont semblables, quand elles ont leurs axes proportionnels ;

6) Quand deux diamètres conjugués comprenant le même angle sont proportionnels ;

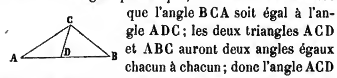
7) Quand l'excentricité et le grand axe sont proportionnels.

8) Deux ellipsoïdes sont semblables quand leurs axes sont proportionnels.

Telle est notre théorie de la similitude à priori. Elle ramène toutes les questions sur la similitude à celle de l'égalité de deux figures ; et l'on peut à priori aussi donner immédiatement les conditions de similitude de deux figures, quand on en donne la génération. Par là aussi on pourrait démontrer tous les théorèmes qui ont été l'objet de postulats, telles sont les propositions sur les angles des triangles et les parallèles.

En effet, de 3) il suit que les trois angles des triangles semblables sont égaux ; que la somme des angles des triangles semblables est constante ; et que deux angles étant donnés, le troisième est déterminé. Or, cela étant, il est facile de démontrer qu'un triangle

quelconque a ses angles égaux à deux droits. Soit DBC ce triangle quelconque; tirons CA de manière que l'angle BCA soit égal à l'angle ADC; les deux triangles ACD et ABC auront deux angles égaux chacun à chacun; donc l'angle ACD



sera égal à l'angle B. Or, les angles du triangle DBC sont égaux à ceux du triangle ABC, augmentés des angles en D qui font deux droits, et diminués de ceux du triangle ACD, égaux à ceux du triangle ABC; il reste donc exactement deux droits pour les angles du triangle DBC; ce qu'il fallait démontrer.

Par les théorèmes qui précèdent, toute la théorie des figures semblables, qui occupe une place si considérable dans les éléments de géométrie, se trouve ramenée au simple énoncé des propositions, et encore on peut se contenter de citer les énoncés au moment même où l'on en a besoin. Tels sont les deux suivants :

Une parallèle menée à la base d'un triangle divise les deux autres côtés en parties proportionnelles.

Toute droite qui divise deux côtés d'un triangle en parties proportionnelles, est parallèle au troisième, etc.

§ 3. — DE LA MESURE DU CERCLE.

Nous avons vu que la ligne droite jouit d'une propriété commune au cercle, de la propriété de pouvoir glisser sur elle-même, ou d'être composée de parties égales. Ces deux figures appartiennent donc à un genre de figures plus général, ou elles rentrent l'une dans l'autre. Dans le paragraphe sur le postulatum d'Euclide (page 203), nous avons déjà fait remarquer que, quand une figure varie d'une manière continue, il arrive sou-

vent qu'une de ses propriétés saillantes se présente en sens inverse et que la position intermédiaire unique conduit à un cas de parallélisme ou de perpendicularité, selon qu'on passe par l'infini ou par zéro. Chacune de ces positions est la position *limite*, et cette limite jouit des propriétés de la figure variable, et, en outre, d'autres propriétés qui lui sont propres en vertu de son caractère de limite. Si donc l'on considère une suite de circonférences dont les centres sont situés tous sur une même droite, et passent tous par un même point A de cette droite, on voit que la courbure diminue à mesure que le rayon augmente; puis, tout d'un coup, la courbure se trouve avoir lieu en sens contraire, et les centres apparaissent à l'autre côté du point A et s'avancent vers lui. La position intermédiaire, celle où la courbure n'est ni dans un sens ni dans l'autre, est une droite passant par A et perpendiculaire à la ligne des centres.

Nous pouvons donc considérer la droite comme la limite des circonférences dont le rayon va toujours en croissant, et cette qualité de la droite d'être la limite des circonférences, est accusée par la propriété commune qu'elle a avec la circonférence, propriété caractéristique et définissant la circonférence même.

Cette observation nous met en mesure de résoudre une difficulté célèbre. Peut-on considérer la circonférence comme un polygone régulier d'un nombre infini de côtés? Quand on admet cette définition, les théorèmes sur la mesure de la circonférence et celle du cercle sont d'une simplicité extrême, avantage incontestable. Si, au contraire, on a recours à la théorie des limites, et que l'on considère la circonférence entre deux polygones réguliers, l'un inscrit, l'autre circons-

crit, qui tendent de plus en plus à se confondre, ou dont la différence décroît en raison de la multiplication des côtés, on obtient, à la vérité, une grande rigueur dans le raisonnement, et surtout une certaine uniformité dans la méthode ; mais combien ces avantages sont compensés par la longueur et l'enchaînement laborieux des propositions !

D'un autre côté, on est toujours ramené à la théorie des limites quand on veut justifier la première définition de la circonférence. Qu'est-ce qu'un polygone régulier? C'est, d'après la définition la plus exacte, un polygone dont tous les côtés, ainsi que les angles, sont égaux. — Pourquoi dès lors une ellipse ne peut-elle pas être considérée comme un polygone régulier? Car les côtés, étant infiniment petits, sont tous égaux; et l'angle de deux tangentes consécutives, étant égal à deux droits, moins un angle infiniment petit, les angles sont aussi égaux. Pour obvier à cette difficulté, on se voit obligé de montrer que la circonférence peut toujours être circonscrite à un polygone régulier, et que ce polygone se rapproche de plus en plus de la circonférence à mesure que le nombre des côtés croît; ce qui est au fond la théorie des limites, moins la franchise. N'y a-t-il à choisir qu'entre la rigueur et la longueur d'une part, la brièveté et le saltus de l'autre? Heureusement non. On peut combler ce saltus. Et c'est la théorie sur l'inversibilité des théorèmes et des définitions qui en fournit le moyen.

Définition. Un *polygone régulier* est celui dont tous les côtés sont égaux, et tous les angles égaux.

Théorème. *Un polygone régulier peut tourner sur lui-même, sans changer de position, c'est-à-dire, que chaque côté peut prendre successivement la place de*

celui qui le suit, sans qu'il y ait aucun changement dans la figure.

Inverse. Tout polygone qui jouit de la propriété de tourner sur lui-même, est un polygone régulier.

Corollaire. Le cercle jouit de cette propriété; il peut donc être assimilé aux polygones réguliers.

Veut-on une proposition sur le nombre des côtés?

Théorème. *Le nombre de positions différentes que peut prendre le polygone régulier, sans qu'il change de lieu, est égal au nombre de ses côtés.*

L'inverse est également vraie. Le nombre des côtés d'un polygone est égal au nombre de positions différentes qu'il peut prendre sans changer de lieu.

Et comme le cercle se meut d'une manière continue sans changer de lieu, le nombre de ses côtés est infiniment grand.

§ 4. — CONSIDÉRATIONS THÉORIQUES SUR LES UNITÉS ET LES NORMES.

Des coordonnées.

Quand un quantum — comme la grandeur — peut varier d'une façon continue et illimitée, il est nécessaire de prendre cette chose à un moment donné, de supposer qu'à ce moment sa détermination est absolue, et d'y rapporter toutes ses autres déterminations. Cette détermination fixe est un point de repère, un centre, à partir duquel on compte la distance des différentes haltes. Nous nommons donc *unité* ou *norme* (suivant le cas) *toute détermination regardée comme fixe et absolue, au moyen de laquelle on apprécie le différent, le variable.*

C'est du soin que l'on mettra à fixer l'unité ou la norme des diverses déterminations de la géométrie, que dépendra la résolution de plusieurs difficultés qu'on y rencontre. Nous en avons vu un exemple remarquable à l'occasion de la direction, où, par l'emploi d'une norme, jusqu'ici non encore dégagée, nous avons été mis à même de résoudre immédiatement beaucoup de problèmes restés sans démonstration.

Nous allons procéder systématiquement à la recherche de ces unités ou de ces normes.

Les problèmes de la géométrie se ramènent, en général, à celui de placer un point A dans un lieu de l'espace, d'après certaines conditions.

Pour cela, prenons un premier point arbitraire et supposé fixe, que nous nommons *origine*, et auquel nous allons rapporter tous les autres. L'origine est la première norme.

Supposons que par l'origine et le lieu où doit être placé le point A, passe une droite — nous verrons tantôt le moyen de déterminer cette droite. — Le point A sera connu si nous connaissons sa *distance* de l'origine (et le sens dans lequel on compte cette distance). La distance est une quantité variable, qui peut devenir plus grande et plus petite. Pour la mesurer, nous avons besoin d'une distance fixe regardée comme absolue ; c'est l'*unité de distance*.

Les distances peuvent se compter en deux sens, la distance de A vers B étant la même que celle de B vers A. C'est, du reste, une conséquence de la symétrie de la droite ; la droite BA étant égale (par superposition) à la droite AB.

Il s'agit maintenant de déterminer la position de cette droite. Or, cette position ne peut s'apprécier

qu'au moyen de celle d'une droite arbitraire regardée comme fixe, que, pour plus de simplicité, on fait passer par l'origine, et qui est la seconde norme. Si, par cette droite fixe et le point A, on fait passer un plan, la position de la droite mobile, qui partant de la droite fixe, tourne autour de l'origine pour s'arrêter au point A, s'appréciera au moyen de la valeur de l'*angle plan* qu'elle fait avec la droite fixe. Cet angle étant susceptible de devenir plus ou moins grand, on a besoin d'une nouvelle unité, l'*unité d'angle*. En outre, on doit savoir dans quel sens il faut compter l'angle; car tout angle peut se compter en deux sens; l'angle est symétrique, c'est-à-dire que l'angle BAC est égal à l'angle CAB.

Comment le plan sera-t-il à son tour déterminé de position dans l'espace ? Au moyen d'un plan arbitraire supposé fixe, que, pour plus de simplicité, on fait passer par la droite fixe : c'est la troisième norme. L'inclinaison du plan variable sur ce plan fixe, ou l'*angle dièdre* de ces deux plans, déterminera à chaque instant la position du premier. L'angle dièdre aura aussi son unité, l'*unité d'angle dièdre*. Enfin les angles dièdres sont susceptibles de se compter en deux sens; ils sont symétriques; l'angle dièdre $pABq$ est égal à l'angle dièdre $qBAp$ (1).

Telles sont les déterminations élémentaires de l'espace: les normes, point fixe, droite fixe, plan fixe, d'un côté; les unités de distance, d'angle plan, d'angle

---

(1) Il était peut-être tout aussi avantageux de commencer par supposer un plan fixe dans l'espace, une droite fixe dans ce plan, et un point fixe sur cette droite, puis de procéder à la recherche des coordonnées du point A. La marche analytique nous a cependant paru préférable.

dièdre, de l'autre. Les premières ne sont pas susceptibles d'augmentation ni de diminution, elles sont seulement susceptibles de changement ; on change le point fixe, la droite fixe, le plan fixe ; c'est-à-dire qu'on en prend d'autres, mais qui, au fond, n'en diffèrent pas. L'unité de longueur, celle d'angle plan, celle d'angle dièdre, au contraire, peuvent être plus ou moins grandes.

En général, les déterminations fixes dans l'espace prennent le nom d'*axes*, quand ce sont des droites ; les quantités, variables de grandeur, au moyen desquelles on détermine un point par rapport à ces normes ou axes, portent le nom de *coordonnées*. Les coordonnées que nous avons trouvées sont celles d'Euler. Il y a une infinité de systèmes de coordonnées, à ne parler même que de celles que l'on obtient en remplaçant les droites et les plans par des courbes et des surfaces courbes (1).

Des unités proprement dites.

Nous nous proposons de prouver que l'unité de longueur doit être nécessairement une droite, l'unité

(1) On peut dire, en général, que tout systéme de coordonnées revient à celui d'Euler (avec la modification de lignes courbes et de surfaces courbes au lieu de droites et de plans). Ainsi, si nous considérons ce que l'on nomme *les équations du point*, dans le système ordinaire, $x=a$, $y=b$, $z=c$, quoi de plus naturel que de voir dans $z=c$ l'équation d'un plan paralléle au plan des xy, et à une distance c de celui-ci ; dans $y=b$ une droite située dans le plan $z=c$, parallèle à l'axe des x, et passant par la projection de l'origine sur ce même plan ; enfin, dans $x=a$, la distance du point à partir de la projection de l'origine sur la droite $y=b$? En réalité donc les trois équations du point sont, l'une l'équation d'un plan, l'autre l'équation d'une droite, et la dernière cette fois est l'équation du point.

de surface, une surface plane, de même que l'unité de volume est un espace. Personne, que nous sachions, n'a tenté cette démonstration, et, l'eût-on fait, nous pensons qu'on n'aurait pas réussi, faute d'avoir dégagé les propriétés des quantités homogènes et isogènes.

L'unité est une grandeur arbitraire supposée connue, définie, absolue en un mot, à laquelle nous rapportons les autres grandeurs. Une grandeur quelconque n'est déterminée que par son rapport avec l'unité. Si l'on suppose cette unité connue, c'est par fiction et parce que l'on est forcé de s'arrêter dans le procès indéfini des grandeurs. Nous ne pouvons rien affirmer de la grandeur absolue des choses ; il n'y a pour nous que des grandeurs relatives. Mais le relatif ne peut subsister seul, nous le sentons ; et par suite nous imaginons une grandeur absolue, nous *absolufions* une grandeur quelconque qui nous sert de point de départ vers l'infiniment grand et l'infiniment petit. C'est sur ce caractère de l'unité de grandeur que repose la vérité des deux propositions suivantes :

Théorème I. *L'unité est nécessairement une portion d'un quantum isogène.*

Car l'unité est arbitraire, et elle doit pouvoir mesurer le quantum ; celui-ci doit donc être ramené à un quantum isogène, et l'unité à l'une de ses portions.

Et en effet, si parmi les quantums autres que la droite et le plan, il en est quelques-uns qui servent de mesure, ce n'est guère que la circonférence pour les angles, les angles pour eux-mêmes, et la sphère pour les angles trièdres.

Théorème II. *L'unité générale, qui peut servir dans tous les cas donnés, appartient nécessairement à un quantum homogène.*

Car l'unité isogène ne peut servir que pour le quantum auquel elle appartient et non pour les autres quantums isogènes, fussent-ils de même nature.

Ainsi un arc de circonférence ne peut servir à mesurer les arcs d'une autre circonférence.

Le quantum homogène, quel qu'il soit, est mesurable par sa portion, et tous les quantums homogènes sont identiques.

L'unité de longueur est donc une portion de droite ; l'unité de surface, une portion de plan ; l'unité de volume, une portion d'espace. Et en passant, remarquons que cette dernière unité prise d'un quantum homogène, n'aurait pu être prise ailleurs. On peut donc dire que mesurer une ligne courbe, c'est la *rectifier;* mesurer une surface courbe, c'est la *planifier.*

Nous sommes au bout de notre tâche. Nous avons résolu, croyons-nous, d'une manière satisfaisante, les questions que nous nous sommes proposées. Ce qui suit n'est en quelque sorte qu'une table des matières d'une géométrie, où l'on mettrait en pratique les principes que nous avons développés dans cet ouvrage.

APPENDICE.

—

PLAN DE LA NOUVELLE GÉOMÉTRIE.

—

PRÉLIMINAIRES.

Définitions. — Géométrie — Figure négative et figure positive; surface, ligne, point; les trois dimensions de l'espace; homogénéité, et le corollaire que toute figure a une grandeur et une forme indépendantes l'une de l'autre; isogénéité; continuité — Égalité et superposition; similitude et majoration ou minoration; équivalence et déformation ou transformation — Problème, théorème, lemme, corollaire, et le terme général de proposition.

Postulats arithmétiques.

Théorèmes fondamentaux. — 1. Inverses et réciproques: la proposition directe affirme une propriété d'une figure donnée; l'inverse prouve que cette propriété définit la figure; la réciproque qu'aucune autre figure ne jouit pas de cette propriété; corollaire sur le paradoxe géométrique. — 2. Sur la forme et la grandeur, et corollaires. — 3. Sur les quantums isogènes.

Espace, plan et droite.—Leur génération; corollaires: le plan partage l'espace, et la droite le plan, dans toute son étendue.

LIVRE I. — GÉOMÉTRIE DANS LE PLAN.

CHAP. I. — *Notions fondamentales.* — Droite dans l'espace, distance; droite dans le plan, direction; angles et parallèles; concavité et convexité; symétrie.

CHAP. II. — *Polygones.* — A. Trigones : ce sont les polygones dont l'étude est la plus importante, puisque tout polygone peut se décomposer en trigones. *a*) Triangle et propriétés générales : égalité, similitude; somme des angles; propriétés des côtés ($a < b + c$; $a > b - c$). Triangle rectangle; triangle isocèle et le corollaire que, la base étant plus petite que la somme des deux autres côtés, toute perpendiculaire est plus courte que toute oblique; triangle équilatéral (voir les polygones réguliers). *b*) Angle et sa bissectrice; propriété de celle-ci. — B. Polygones proprement dits : leur décomposition en trigones; théorèmes sur les sommets, les angles, les diagonales (1). *a*) Polygones réguliers : égalité, similitude, propriétés générales. *b*) Figures composées : triangle rectangle divisé par la

---

(1) On peut se poser, sur les polygones, plusieurs questions qu'on a coutume de laisser de côté; telles sont les suivantes :

Combien peut-on décrire de polygones ayant les mêmes sommets?

Combien ayant les mêmes droites indéfinies pour côtés?

Quelles sont les conditions qui déterminent l'individualité d'un polygone?

Les deux premières offrent une application très-simple des combinaisons circulaires, et sont tout au moins aussi intéressantes que celle qui porte sur le nombre des diagonales. La troisième n'est que l'extension des théorèmes analogues sur les triangles. En effet, ces conditions sont : tous les côtés avec leur rang, et tous les angles sauf trois; ou bien : tous les côtés moins un avec leur rang, et tous les angles sauf deux ; ou bien encore : tous les côtés moins deux avec leur rang, et tous les angles sauf un.

hauteur; les bissectrices, les hauteurs, les médianes, les perpendiculaires au milieu des côtés dans un triangle.

Chap. III. — *Cercle.* — *a*) Rayon, diamètre, circonférence; égalité, similitude; rapport de la circonférence au diamètre : tous les cercles étant semblables, ce rapport est constant et on le nomme π ; le cercle jouit des propriétés des polygones réguliers. *b*) Figures composées: sécante et tangente; angles au centre, à la circonférence, en dedans ou en dehors de celle-ci; cordes et sécantes; polygones inscrits et circonscrits; calcul de π.

Chap. IV. — *Mesure des surfaces.* — *a*) Triangle équivalent à un demi-parallélogramme; parallélogramme équivalent à un rectangle; comparaison des rectangles. Aire des polygones : des polygones réguliers ; du cercle. Rapport des aires des figures semblables ; de deux triangles ayant un angle égal ou supplémentaire. *b*) Figures composées : les triangles divisés par leur bissectrice ; théorème de Pythagore et corollaires ; passage à la trigonométrie.

LIVRE II. — GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

Chap. I. — *Notions fondamentales.* — Droite et plan; angles dièdres.

Chap. II. — *Polyèdres.*

Chap. III. — *Corps ronds.* — Cylindre; cône; sphère.

Chap. IV. — *Mesure des volumes.*

FIN.

EXPOSITION SCIENTIFIQUE

DES

PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE

PRÉCÉDÉE D'UNE

DISCUSSION SUR LE FONDEMENT DE LA CERTITUDE

DES

PROPOSITIONS PREMIÈRES DE CETTE SCIENCE (1),

PAR

FRÉD. UEBERWEG,

DOCTEUR EN PHILOSOPHIE

Si nous envisageons notre sujet au point de vue purement mathématique, il se présente tout d'abord une question intéressante, celle de *ramener à un nombre déterminé et le plus petit possible les propositions fondamentales de la géométrie, et d'en déduire tous les théorèmes avec rigueur.*

La géométrie d'Euclide, on le sait, n'a résolu qu'incomplétement ce problème. Outre les définitions des figures premières, lignes, surfaces, etc., elle pose, sous le nom

(1) Cette dissertation a été publiée pour la première fois dans les Archives pédagogiques, vol. XVII, 1851. — L'introduction et quelques parties du système ont été modifiées par l'auteur lui-même en vue de cette traduction. *(Note du traducteur.)*

d'*axiomes* et de *postulats*, une suite de propositions non démontrées, sans s'expliquer, et avec raison, sur leur validité ; car c'est la mission de la philosophie, et en particulier de la théorie de la connaissance. Mais même sous le rapport mathématique, on peut lui reprocher :

1. L'énumération incomplète en fait, quoique complète en apparence, des axiomes : l'existence du plan, la comparabilité de toutes les lignes d'après leurs rapports de grandeur, l'égalité qu'on établit entre la somme de plusieurs angles et l'angle formé par les deux côtés extrêmes, d'où suit la mesure des angles ; toutes ces propositions ne sont mentionnées ni parmi les axiomes, ni parmi les théorèmes ; et Euclide lui-même, sans aucun doute, n'avait pas songé à en faire l'objet de son attention, les croyant implicitement comprises dans ses axiomes et postulats.

2. Le défaut de principe pour l'ordre des axiomes. A la vérité, il est impossible de déduire les axiomes, car ils perdraient alors ce caractère ; mais on peut les établir d'un point de vue général, de manière à en montrer l'ensemble. De là le troisième inconvénient :

3. Le nombre indéterminé de ces axiomes. Rien ne nous assure ainsi que les développements postérieurs de la Géométrie ne nécessiteront pas une augmentation de ce nombre, comme, d'un autre côté, il n'est pas prouvé qu'on ne puisse lui faire subir une diminution en démontrant quelques-uns d'entre eux.

Malgré des efforts réitérés, ces lacunes n'ont pas encore été comblées ; et la solution de la difficulté, même dans le cas où cette solution ne serait pas élémentaire, n'en aurait pas moins un grand intérêt scientifique. Nous ne voulons pas dire que plus tard on ne trouvera pas le moyen de faire entrer, dans l'enseignement élémentaire, les résultats de la science, mais ici il s'agit, avant tout, d'un problème scientifique et non didactique.

Mais ce n'est pas seulement l'intérêt mathématique qui a été l'occasion de ce travail, il y en a un autre tout philo-

sophique, tout logique, ayant trait à la théorie de la connaissance :

D'où provient, dans les mathématiques, la certitude des propositions fondamentales qu'on ne peut prouver mathématiquement?

Parmi les différentes hypothèses proposées en réponse à cette question, celle de Kant est particulièrement digne d'attention. D'après lui, l'intuition de l'espace est en nous à priori comme la forme de la sensibilité extérieure. Ainsi, avant toute expérience, et indépendamment de toute expérience, quoiqu'elle ne vienne à la conscience que par l'expérience, le moi produit cette forme, comme toutes les formes de l'intuition et de la pensée en général, de lui-même, par une activité originelle, et l'applique à la matière de la perception donnée empiriquement, de sorte que tous les phénomènes en sont nécessairement revêtus. Mais ce qui existe indépendamment de nous et affecte nos sens, ne revêt pas ces formes; les *choses en soi*, comme les appelle Kant, n'existent ni dans l'espace, ni dans le temps, et ne sont pas soumises à la loi de causalité.

Telle est la célèbre théorie de Kant sur l'apriorité. Plusieurs de ceux qui vinrent après lui, tout en acceptant les prémisses, ont rejeté les conséquences, c'est-à-dire, que la chose en soi fût en dehors du temps et de l'espace. Pour eux, le temps et l'espace sont donnés à priori, et produits par le moi sans le concours des choses, et cependant les choses elles-mêmes existent et dans le temps et dans l'espace. Par suite, on doit admettre entre les choses et notre intuition, une harmonie préétablie, de manière que ce qui est produit en nous par une causalité purement interne, coïncide néanmoins exactement avec ce qu'amène au même instant, dans le lieu correspondant, la causalité qui agit dans les choses en soi. Et par conséquent, à la place de la recherche progressive des lois naturelles entre le sujet connaissant et les choses, on met une suite non interrompue de miracles. Ce compromis n'aboutit pas. Dans les prémisses, se ranger sous l'autorité de philosophes

célèbres; dans le fond, s'accommoder complaisamment à l'opinion vulgaire; chacun de ces procédés pris à part est déjà mauvais, mais leur réunion est la ruine de la véritable philosophie. Il s'agit donc de soumettre à la critique les prémisses de Kant.'

Kant infère de l'*apodicticité* des lois mathématiques l'apriorité de l'intuition de l'espace. Celles-là contiennent pour celle-ci le fondement de la connaissance, celle-ci pour celles-là le fondement réel. Les propositions géométriques, dit Kant, ne peuvent pas s'obtenir par une simple analyse de la notion même qui en est l'objet, mais seulement par un recours à l'intuition de l'espace. Elles ne sont pas formées analytiquement, mais bien synthétiquement. Si l'intuition de l'espace était empirique, continue-t-il, les propositions géométriques n'auraient qu'une valeur empirique et ne pourraient certainement pas être apodictiques. Si, au contraire, l'espace est une intuition à priori, ces propositions ont une valeur rigoureusement générale et nécessaire. A cet argument général Kant en ajoute quelques autres, mais qui n'ont d'importance que si l'on admet le premier. Nous nous bornerons donc à la critique de celui-ci.

Nous reconnaissons avec Kant la valeur *apodictique* des propositions mathématiques, mais nous la croyons compatible avec l'origine *empirique* de l'intuition de l'espace; et nous croyons que Kant a cherché à tort dans une origine à priori de l'intuition de l'espace la certitude qui gît dans *l'ensemble de l'enchaînement mathématique*. (Cf. *Système de Logique*, p. 373 et 383.)

D'un côté Kant n'a pas prouvé que l'apriorité de cette intuition entraîne l'*apodicticité* des propositions mathématiques et en particulier des axiomes d'Euclide: c'est une simple assertion. Quelque soin qu'il ait mis à tirer toutes les conséquences de ses prémisses, il n'a pas l'air de soupçonner la nécessité de prouver les prémisses elles-mêmes: il lui semble aller de soi qu'*empirie* et *apodicticité* s'excluent complètement. Quand on voulut soutenir contre lui l'origine

empirique de cette apodicticité, il ne daigna pas la discuter sérieusement, mais y répondit par la boutade : *Ex pumice aquam !* (1) Si Kant, avec sa pénétration si éminente, avait soumis son préjugé à la critique, qui eût été plus capable que lui de trouver le vrai rapport ? Mais il ne crut pas devoir diriger son attention sur ce point. Il ne s'enquiert pas si la perception des rapports réels dans l'espace n'est pas conditionnée physiologiquement dans les sens du tact et de la vue par la position des fibres nerveuses, et ainsi empirique ; pour lui, les sens donnent uniquement la matière, et les rapports de lieu proviennent du moi seul. Il ne recherche pas si les idées fondamentales, axiomes et postulats de la géométrie, que l'enfant ou le non-mathématicien n'a pas encore, et que souvent il ne comprend pas dès l'abord sans une certaine difficulté, ne sont pas fournies, en partie, par abstraction de l'ensemble de l'intuition, et par idéalisation des données sensibles, d'après des lois scientifiques ; en partie, par des constructions artificielles : il repousse d'avance toute hypothèse de cette nature. Il ne remarque pas que les propositions fondamentales de la géométrie en elles-mêmes ont une valeur non apodictique, mais seulement assertoire. (Cf. Drobisch, *Logique*, 1851, Avant-propos.) Il ne songe pas davantage que les propositions qui s'en déduisent ne font pas que reposer sur elles, mais leur servent à leur tour d'appui. Et cependant la confirmation de prémisses hypothétiquement admises, ou du moins, sous certains rapports, hypothétiques, réside dans l'accord de toutes les conséquences entre elles, et, quand la comparaison est possible, dans leur accord avec les données de l'expérience ; la certitude croît de plus en plus, et elle devient même absolue, s'il est prouvé que ces prémisses-là seules peuvent expliquer les

(1) C'est-à-dire : Vouloir tirer d'une proposition expérimentale la nécessité, c'est vouloir exprimer de l'eau d'une pierre ponce ; c'est une véritable contradiction. (Kant, *préf. de la Crit. de la Raison prat.*) (*Note du trad.*)

faits. Tous les théorèmes des mathématiques, qui se déduisent des prémisses avec une rigueur apodictique, d'après les lois du syllogisme, s'accordent sans contradiction entre eux, et avec l'expérience, quand on construit la figure; et cela d'autant plus exactement que la construction est plus exacte. Un vice dans les prémisses se ferait jour à la longue quelque part dans ce nombre infini de propositions, par des conséquences d'une fausseté évidente. De ce que cela ne s'est jamais présenté depuis la naissance des mathématiques, et que les erreurs qui se produisaient, provenaient de causes étrangères, nous devons admettre que la certitude que nous avons de leur vérité, d'abord limitée, s'élève jusqu'à une certitude égale à celle de notre existence qui repose sur l'expérience interne. Quoique les propositions fondamentales aient en elles-mêmes une certitude simplement assertoire, cependant le système mathématique, produit du travail des siècles, a, comme *tout*, comme *ensemble*, une certitude apodictique qu'il répand sur les propositions particulières.

Kant part de cette opposition : *empirique* ou *à priori;* mais il y a un terme intermédiaire : *élaboration rationnelle des données empiriques d'après les lois logiques sans éléments à priori de la connaissance.* L'essai de Kant de prouver l'apriorité de l'intuition de l'espace par l'apodicticité de la géométrie, repose donc sur une disjonction incomplète. De la non-validité d'un des extrêmes ne suit pas la validité de l'autre; car il y a, disons-nous, un terme intermédiaire, et c'est en lui que nous trouvons le vrai rapport. Pourquoi Kant n'a-t-il pas aperçu ce terme? c'est sa manière incomplète, subjective et toute formelle de considérer les lois logiques qui lui a dérobé la valeur véritable des formes logiques (syllogisme, induction, analogie, hypothèse), et leur rôle dans la génération et l'extension de la connaissance. (Cf. *Syst. de Log.*, 253, 373, 383, 388, 419.)

Comme les autres sciences, la géométrie doit, dans sa partie analytique, s'élever des données empiriques à des

principes réels, pour descendre synthétiquement de ceux-ci à chaque proposition particulière (Cf. *Syst. de Log.* 413,418). Maintenant rien n'empêche dans la partie analytique de tirer directement de l'intuition sensible, par abstraction et idéalisation, les idées fondamentales d'Euclide, puis de s'élever hypothétiquement, d'une validité au moins approximative et garantie par l'observation sensible, jusqu'à une validité absolue, pour obtenir ainsi les axiomes et postulats comme principes réels des mathématiques. C'est ainsi évidemment qu'il faut procéder dans l'enseignement élémentaire, du moins en général, bien qu'on puisse tenter des améliorations de détail. Mais le but logique de la présente dissertation demande une autre marche. L'origine empirique des principes mathématiques une fois reconnue, on peut employer les axiomes d'Euclide pour ce qu'ils sont, c'est-à-dire pour l'expression hypothétiquement exacte des rapports sensibles des choses, exactitude manifestée de plus en plus dans l'enchaînement des conséquences. Mais pour cela, il faut d'abord renverser la théorie de Kant sur l'*apriorité*; et il paraît dès lors convenable de substituer aux axiomes d'Euclide, auxquels l'habitude a attaché le prédicat d'*apriorité*, des propositions tout autres, et dont l'origine empirique ne puisse être niée. S'il est prouvé que de ces propositions on peut tirer toute la géométrie aussi bien et même mieux que des axiomes d'Euclide, on a en même temps montré qu'on peut, sans recourir à l'*apriorité*, baser la géométrie sur des principes analogues à ceux des sciences naturelles, et ranger la géométrie au nombre de ces sciences.

Notre point de départ est donc l'intuition sensible où espace et matière sont encore confondus; l'abstraction nous donnera l'espace à part; le mouvement conduit naturellement à cette abstraction. Un corps matériel passe d'un lieu à un autre ; quelque chose reste le même, quelque chose change ; ce qui change, nous le nommons *lieu ;* et notre conscience gagne ainsi l'idée de lieu comme de quelque

chose d'étendu en opposition avec la matière qui peut occuper ou abandonner le lieu. Ici viennent se joindre d'autres abstractions et combinaisons. Le mouvement doit donc être contenu dans notre point de départ empirique. Maintenant il s'agit de choisir certains faits empiriques comme fondement de la partie analytique ; ce choix est possible dans certaines limites. On ne procède pas autrement dans les sciences dites naturelles. L'astronomie sphérique et théorique s'élève analytiquement de l'observation à la constatation des mouvements réels, comme fondement réel des mouvements apparents : Kepler découvrit l'orbite réelle des planètes en se servant des observations de Tycho sur la planète Mars. Le choix de cette planète est, il est vrai, dû un peu au hasard ; il était avantageux, mais non nécessaire. On en peut dire autant de la découverte de l'attraction. La création de l'optique mathématique, et plus tard la préférence donnée à la théorie des ondulations sur celle de l'émission se basent sur certaines expériences ; d'autres expériences pouvaient conduire au même but; de sorte que l'on avait une certaine latitude dans le choix. Nous en pouvons dire autant de la base empirique de la géométrie : sans être illimité ni arbitraire, notre choix doit être tel qu'il suffise à constater les rapports fondamentaux géométriques. Nous ne pouvons dire d'avance combien de ces propositions premières sont nécessaires, puisque ce serait là supposer les principes mathématiques que nous ne possédons pas encore et à la recherche desquels nous procédons. Cependant nous ferons remarquer que le nombre *quatre* de nos expériences se lie aux *trois* dimensions de l'espace, et aux *quatre* déterminations fondamentales, *corps, surface, ligne, point.*

Arrivons maintenant à ces expériences. Dans la partie analytique, nous en déduirons rigoureusement les principes réels, et en particulier, les axiomes d'Euclide; dans la partie synthétique, nous irons jusqu'à la limite où les propositions se suivent avec rigueur dans les géométries

ordinaires. Un mot encore : nous devons beaucoup aux travaux des géomètres célèbres, qui, tels que Legendre, Erb (1), Eisenstein ont consacré leurs temps à la solution de ces problèmes; mais le plan et la base logique nous appartiennent en propre.

Solution du problème

D'après le témoignage des sens,

I. Un corps matériel solide peut, s'il est libre, aller partout où un autre corps ne se trouve pas.

II. S'il a une de ses places fixe, quoique plus limité dans ses mouvements, il peut cependant encore se mouvoir.

III. S'il a deux de ses places fixes, aucune de ses parties n'est plus susceptible de tous les mouvements possibles dans **II**, bien qu'elles puissent encore être mues, et une certaine série de places liées entre elles et avec les points fixes reste immobile.

IV. Enfin, si l'on rend fixe une troisième place, tout mouvement du corps devient impossible.

En vertu de ce qui a été dit plus haut sur l'idéalisation, nous admettons (à titre d'axiome ou d'hypothèse) que ces propositions ont une exactitude absolue. Nous excluons rigoureusement toute intuition, tout axiome, tout postulat, en un mot, toute proposition qui ne s'y trouve pas impliquée. Si nous parvenons à fonder sur elles la géométrie avec la rigueur mathématique, nous regardons notre tâche comme accomplie. Nous procéderons d'après l'ordre de nos expériences.

I. *Un corps se meut :* dans le mouvement quelque chose change et quelque chose reste le même ; de là, une distinction :

Définition. Nous nommons *lieu* ce qui change dans le mouvement.

---

(1) Le problème de la ligne droite, de l'angle et du plan, Heidelberg, 1846.

Le corps occupe un autre lieu; celui-ci le renferme comme le précédent le renfermait; pour y être reçu, le corps n'a pas eu besoin de s'y approprier, il y est entré tel qu'il était; cela eût été impossible si le nouveau lieu n'était pas complétement *homogène* au premier.

Le mouvement pouvait être arrêté avant que le corps eût atteint ce second lieu, et nous en pouvons dire autant de toute station intermédiaire. L'expérience ne nous donne là-dessus aucune limite, et rien ne nous autorise à en poser une arbitrairement. Par suite, nous devons comprendre la division possible du chemin en ce sens que, si loin que nous la poussions, nous pouvons la pousser plus loin encore; le changement de lieu peut être aussi petit que l'on veut, il y a moyen de le diminuer encore. Cette proposition va recevoir une autre forme.

Définition. Nous nommons *grandeur infiniment petite*, toute grandeur qui est assujétie à parcourir une série telle 1° que chacun de ses termes soit suivi d'un autre doué de la même propriété et plus petit en grandeur absolue; 2° que, quelque grandeur fixe que l'on prenne, on puisse trouver dans la série un terme qui soit plus petit en grandeur absolue.

Nous remarquons que cette définition convient à la grandeur infiniment grande si l'on y substitue le mot *grand* au mot *petit*. (1).

Définition. Nous nommons *grandeur continue* celle qu'on peut augmenter ou diminuer infiniment peu.

---

(1) Ceux qui voudraient voir dans l'infini une grandeur déterminée, devraient le considérer comme la limite de ce procès, qui, par sa nature, est dépourvu de limite, et tomberaient ainsi sous le coup d'une contradiction évidente. Cette contradiction apparaîtrait encore quand on s'enquerrait de la grandeur de l'infiniment petit qu'on ne peut faire égal à 0, ni plus grand ou plus petit que 0, puisque la série n'atteint jamais 0, et renferme toujours des termes différents de toute grandeur fixe autre que 0. Toutes ces contradictions tombent dès que l'on écarte la fausse idée d'une valeur fixe de l'infiniment petit; l'infini mathématique est plutôt dans le procès lui-même.

D'après cette définition, nous pouvons dire que, dans notre expérience, le corps change de lieu par infiniment petits, que son mouvement est continu. Tous les lieux qu'il occupe successivement étant homogènes, nous avons l'idée d'un tout homogène.

De même que le mouvement peut être interrompu, de même il nous est libre de le continuer dans tous les sens, sans limite : l'expérience nous le dit, nous regardons donc ce tout comme susceptible d'être étendu à l'infini.

THÉOR. **I.** *Il existe un ensemble continu et homogène, capable d'être divisé et étendu à l'infini, de lieux qu'un corps peut occuper.*

Définitions. Nous nommons cet ensemble *espace* ; une partie finie (1) de cet espace infini, nous la nommons *corps géométrique.*

C'est sur cette homogénéité de l'espace que repose l'universalité des propositions géométriques, en tant que ce qui est prouvé pour un lieu de cet espace est nécessairement prouvé pour tous.

Homogénéité, continuité, infinité, telles sont les trois propriétés fondamentales de l'espace à conclure de la première expérience. Les autres nous conduiront plus loin.

II. *Si le corps a une de ses places fixes, quoique plus limité dans ses mouvements, il peut cependant encore se mouvoir.*

Définition. Nous nommons *rotation* le mouvement d'une figure étendue, solide, dont un ou plusieurs éléments restent fixes.

Si nous nous demandons ce qui reste immobile, nous verrons facilement que ce ne peut être une partie finie de l'espace. Car si petite qu'elle soit, on peut toujours — en vertu de la continuité de l'espace — la diviser, et

---

(1) Le terme *fini* est trop vague : un cône, un cylindre infinis n'en sont pas moins des corps géométriques La définition de la *limite* ne venant que plus bas, n'y a-t-il pas ici anticipation?

(*Note du traducteur.*)



par là distinguer en elle une infinité de lieux qui sont fixes en même temps qu'elle. Mais l'expérience nous montre que, quand plusieurs lieux sont fixes, il apparaît d'autres phénomènes que celui dont nous parlons, à savoir ceux que nous mentionnons dans les expériences suivantes ; et cela si loin qu'on la suppose poussée (1). Or, l'homogénéité et la continuité de l'espace nous autorisent à accorder une généralité absolue à ce qui est démontré par l'expérience avoir une généralité empirique. La place qui reste fixe ne peut donc être une partie finie (2) de l'espace, elle ne peut laisser distinguer en soi une seconde place homogène, elle est l'espace élémentaire absolument simple.

Définition. Nous nommons *point* (3) l'espace élémentaire absolument simple.

Ici un mot d'explication est nécessaire pour éclaircir une difficulté, dans laquelle cette définition semble nous impliquer. L'assertion qu'il existe un espace élémentaire tout-à-fait simple, conduit à des contradictions. Car celui-ci doit être ou une partie finie, ou une partie infiniment petite de l'espace, ou un rien d'espace, un 0 en grandeur. Nous venons de démontrer que ce ne peut être une partie finie; ce ne peut être non plus une partie infiniment petite, car l'infiniment petit n'est pas simple, puisqu'il est, nous le savons, divisible, et

---

(1) N'est-ce pas une exagération de la portée des expériences III et IV? Et même, celles-ci ne contiennent-elles pas, absolument parlant, une contradiction apparente que la théorie doit lever? En effet, l'expérience IV pose comme condition de l'immobilité du corps, la fixité de *trois* de ses places, et l'expérience III reconnaît que si *deux* places sont fixes il y en a une *infinité* d'autres qui sont dans le même cas.

(*Note du traducteur.*)

(2) Ce qui n'est pas une partie finie de l'espace peut être une ligne ou une surface.

(*Note du traducteur*)

(3) Nous renvoyons, pour ce qui concerne les définitions de la *continuité*, de l'*homogénéité*, du *point* et des *éléments*, aux endroits de notre ouvrage où nous discutons ces notions.

(*Note du traducteur.*)

divisible à l'infini ; encore moins, peut-il être un rien d'espace, car, comme on ne pourrait lui accorder aucune qualité non étendue, et qu'il serait un rien, un 0 d'espace, il serait absolument *rien*, et par là on ne pourrait lui assigner une place dans l'espace ; le non-être n'a pas de prédicats (*non entis non sunt prædicata*). On ne peut sortir de ce trilemme. En fait l'élément simple n'est pas imaginable, on ne peut que se le représenter par une fiction. La pensée reconnaît seulement l'infiniment petit, c'est-à-dire le procès infini de la division, qui n'amène jamais un résultat final. Mais l'imagination demande un terme fini pour s'y reposer ; elle feint en conséquence, sans s'inquiéter de la contradiction, un résultat à ce procès infini, et substantifie la valeur de la limite, c'est-à-dire une grandeur d'espace = 0. Cette fiction est le *point* de l'imagination, et celui-ci apparaît donc en tous cas comme l'élément absolument simple. La fiction du point, sous le rapport didactique est indispensable, quoiqu'on ne puisse méconnaître la contradiction qui lui est inhérente. Pour la pensée, à la place des points, on doit toujours supposer des espaces infiniment petits, égaux l'un à l'autre.

Après cette détermination plus précise de notre définition, nous allons déduire quelques propositions sur ce point.

De ce que, suivant la définition, on considère dans le point, non la manière dont on l'a obtenu, mais la valeur limite, qui est toujours nulle, les points ne se distinguent pas entre eux quantitativement, et comme on ne peut parler de différence qualitative, l'espace étant homogène,

Théor. 2. *Tous les points sont égaux.*

Corol. *Un point peut se substituer à un point quelconque par le mouvement.*

Définition. La totalité de tous les lieux successifs occupés par une figure en mouvement se nomme sa *trajectoire*. Dans la trajectoire qu'un point mobile parcourt d'un mouvement continu, entre deux points quelconques, si rapprochés qu'ils soient, on en peut toujours trouver un troisième intermédiaire. De là :

Théor. 3. *La trajectoire d'un point contient une infinité de points* (1).

La seconde expérience nous a donné le point en tant que nous considérions la place immobile; il nous reste, pour en tirer tout ce qu'elle contient, à porter notre attention sur les points mobiles.

Définition. La totalité consistant en une ou plusieurs figures continues de tous les points qu'un point obéissant à certaines lois peut occuper, se nomme *son lieu géométrique* ou simplement *son lieu.*

Recherchons le lieu géométrique d'un des points mobiles du corps.

Le corps dont nous considérons les mouvements nous apparaît comme solide, c'est-à-dire inextensible et inflexible. Cette solidité relative ou approximative que l'expérience nous montre, nous l'idéalisons et la rendons absolue. Le corps peut se mouvoir, tourner, etc., ses points restent invariablement liés entre eux. Nous acceptons cette liaison invariable comme quelque chose de donné empiriquement; elle repose à la fois sur des rapports dans l'espace et sur des forces matérielles. Nous nous attachons seulement à ceux-là, sauf à les trouver plus tard analytiquement.

Définitions. Nous appelons provisoirement *lieu sphérique*, le lieu du mouvement d'un point qui est invariablement lié à un autre point fixe. Ce point fixe, nous le nommons *centre* du lieu sphérique.

Nous allons rechercher la nature du lieu sphérique.

Un caractère de celieu sphérique, visible d'ailleurs dans l'intuition, a son fondement dans l'homogénéité de l'espace (théor. 1); c'est ce mouvement de la liaison $a'b'$ qui s'étend également partout autour de a'. De là suit que le lieu du mouvement ou la totalité de tous les points que b' occupe dans toute sa rotation possible, enferme complètement le point a'.

(1) Nous préférons à cette proposition, grosse de controverses, la suivante: *Dans la trajectoire d'un point, on peut distinguer une infinité de points.* (*Note du traducteur.*)



Mais de ce que le corps, d'après l'expérience, est limité dans son mouvement, il suit que le lieu sphérique détache de l'espace infini, un espace fini auquel le point *a'* appartient (1). De là la propriété suivante du lieu sphérique :

Théor. 4. *Tout lieu sphérique renferme pleinement un espace fini dans l'intérieur duquel tombe le point immobile ou le centre.*

Définitions. Nous nommons *sphère*, l'espace fini ou corps géométrique renfermé par un lieu sphérique. Par rapport au lieu sphérique, tout élément de l'espace qui appartient à la sphère, lui est *intérieur* ; tout élément qui n'appartient pas à la sphère, lui est *extérieur*.

Pour tous les points du lieu du mouvement de *b'*, la liaison invariable avec *a'* est la même ; on peut donc prendre un quelconque d'entre eux pour point de départ du mouvement et l'échanger avec chacun des autres sans que le lieu sphérique en soit altéré :

De là suit que :

Théor. 5. *Le lieu du mouvement d'un point* b' *autour d'un point* a' *qui lui est lié d'une manière invariable, est aussi le lieu du mouvement pour tous les points qui y tombent.*

Soient maintenant B le lieu du mouvement de *b'* autour de *a'*, et C celui du mouvement de *c'* autour du même point *a'*. Il est clair que :

Théor. 6. *Si le point* c' *lié invariablement au point* a' *ne tombe pas dans le lieu sphérique* B *de* b' *autour du même point* a', *il en sera de même de tous les points du lieu sphérique* C.

Définition. Les lieux sphériques qui ont même centre sont dits *concentriques*.

Nous pouvons donc donner à la proposition 6 la forme suivante :

Théor. 6. *Deux lieux sphériques concentriques qui ne coïncident pas, n'ont aucun point commun.*

---

(1) Ne semble-t-il pas que l'intuition fasse ici tous les frais du raisonnement? (*Note du traducteur.*)

Définition. Nous nommons *écorce sphérique*, l'espace compris entre deux lieux sphériques concentriques.

Le lieu du mouvement d'un point quelconque *d'*, situé dans l'écorce sphérique et lié invariablement au centre, est un nouveau lieu sphérique qui n'a aucun point commun avec les deux premiers. L'écorce sphérique se trouve ainsi divisée en deux écorces sphériques nouvelles; et comme on peut, dans chacune de celles-ci, distinguer de nouveaux points, et répéter avec eux la même opération, on peut dire que le nombre des lieux sphériques concentriques qui peuvent tomber dans une écorce sphérique finie, sans avoir entre eux de point commun, est infiniment grand. Si le lieu sphérique était une partie finie de la sphère, un nombre fini de lieux sphériques pourrait remplir l'écorce sphérique. Comme cela n'a pas lieu, il suit que :

Théor. 7. *Le lieu sphérique n'est pas une partie finie de la sphère.*

Par suite, si l'on considère le point comme un espace infiniment petit (ce qui doit avoir lieu dans une conception rigoureusement scientifique), alors le lieu sphérique engendré par son mouvement doit être un espace infiniment petit (1). Si, au contraire, on regarde le point comme le résultat fictif de la division infinie de l'espace dans tous les sens (c'est le point de l'imagination, comme nous l'avons expliqué plus haut), alors de même, le lieu sphérique doit être considéré comme le résultat d'une certaine division de l'espace, division poussée à l'infini.

Définition. L'élément le plus extérieur d'une figure étendue se nomme *limite*.

L'élément le plus extérieur ne peut être un solide; car, en vertu de l'infinie divisibilité ou de la continuité de l'es-

(1) Il y aurait ici une restriction à faire : une surface, qui est aussi un espace infiniment petit (dans le sens de l'auteur), engendre cependant le solide par son mouvement.

(*Note du traducteur.*)

pace, on le partagerait en *extérieur* et *intérieur*; ce ne peut être qu'une partie infiniment petite dans le sens indiqué plus haut.

L'imagination cependant feint un résultat final à cette division à l'infini, et substantifie la valeur limite = 0. Cette fiction (qui renferme une contradiction intime) est la limite de l'imagination. D'après cela, le lieu sphérique est l'élément le plus extérieur de la sphère qu'il renferme.

Définition. La limite d'un corps se nomme *surface*.

THÉOR. **9**. *Tout lieu sphérique est une surface.*

Nous pouvons donc désormais, à la place de *lieu sphérique*, dire *surface sphérique*.

La suite continue et infinie de surfaces sphériques, laquelle forme la sphère, peut se représenter par le mouvement d'une surface sphérique qui change continuellement de manière à passer dans la surface sphérique contiguë. De ce mouvement naît la sphère.

De la même manière, il suit de la définition générale du corps que chaque corps peut être amoindri où agrandi d'une façon continue par le retranchement ou l'addition d'un nombre infini de surfaces. Le surcroît ou la différence sont eux-mêmes des corps à leur tour. Or, le mouvement d'une surface, invariable ou variable d'une façon continue, et qui ne reste pas, du moins tout entière, en elle-même, engendre une suite de surfaces. Donc :

THÉOR. **10**. *La trajectoire d'une surface qui ne reste pas en elle-même, est un corps.* (1)

Nous abordons la troisième expérience.

III. *Si le corps a deux de ses places fixes, aucune de ses parties n'est plus susceptible de tous les mouvements possibles dans* **II**, *bien qu'elles puissent encore être mues*,

(1) C'est la coutume de placer immédiatement à côté l'une de l'autre les deux propositions : *La surface est la limite du corps;* et *la trajectoire d'une surface qui ne reste pas en elle-même, est un corps*. Nous croyons les avoir déduites l'une de l'autre avec toute la rigueur mathématique.



et une certaine série de places liées entre elles et avec les points fixes reste immobile. (1)

Soient *a'* et *b'* les points fixes, et *c'* un point mobile lié invariablement aux précédents ; d'après l'expérience, le lieu de *c'* ne pourrait être un lieu sphérique.

Théor. **11**. *Toute surface sphérique n'a qu'un centre.*

Définition. La partie commune de deux figures géométriques se nomme leur *intersection.*

Théor. **12**. *Le lieu géométrique du mouvement d'un point* c' *lié invariablement à deux points fixes* a' *et* b' *est l'intersection des lieux de son mouvement autour de chacun d'eux en particulier* (2).

Définitions. Le lieu *c* du mouvement d'un point *c'* qui est lié invariablement à deux autres *a'* et *b'*, nous le nommons provisoirement *lieu périphérique ; a'* et *b'* en sont les *centres.*

Théor. **13**. *Le lieu périphérique* c *du mouvement d'un point* c' *autour de deux centres* a' *et* b' *est en même temps le lieu périphérique pour tous les points qui en font partie* (3).

Donc, si pour les mêmes centres *a'* et *b'*, deux lieux périphériques *d* et *e* avaient un point *c'* commun, ils coïncideraient en tant qu'ils se confondraient avec le lieu périphérique *c*. Donc si le point *e'* ne tombe pas dans le lieu périphérique *d* d'un autre point *d'* autour de *a'* et *b'*, son lieu périphérique *e* n'a aucun point commun avec *d.*

Définition. Deux lieux périphériques qui ont leurs deux centres communs, se nomment *concentriques.*

Théor. **14**. *Des lieux périphériques concentriques qui ont un point commun, coïncident ; quand ils ne coïncident pas, ils n'ont aucun point commun.*

---

(1) Cette dernière partie de l'expérience ne se trouve pas dans les *Arch. pédagogiques.* L'auteur en avait cependant besoin pour établir l'existence de la ligne droite. — Voir plus bas.

(*Note du traducteur.*)

(2) La démonstration, d'ailleurs facile, n'a pas été traduite.

(*Note du traducteur.*)

(3) Démonstration analogue à celle du théorème 3.

(*Note du traducteur.*)

Recherchons maintenant si l'intersection d'une surface sphérique renferme et limite complétement une ou plusieurs parties de celle-ci.

Soient B une sphère fixe et invariable autour du point b', A une autre continuellement variable autour du point a'. Celle-ci pouvant s'étendre indéfiniment, finira certainement par embrasser tout entière la sphère B. D'un autre côté, elle peut diminuer à l'infini, sa valeur limite étant le point a', dont la grandeur est censée nulle. En vertu de la continuité du développement, elle parcourra tous les états intermédiaires de grandeur.

Or, le point a' peut être situé à l'extérieur, à l'intérieur, ou sur la limite de B. 1°. S'il est extérieur, un instant doit arriver où la sphère A, qui s'approche continuellement de a', est tout-à-fait en dehors de la sphère B. Mais la grandeur qu'a la sphère A quand elle est en dehors de B, diffère de sa grandeur quand elle embrasse B, d'une quantité finie égale au moins à B. Comme le décroissement est continu, ces deux états de grandeur ne se suivent pas immédiatement, et sont séparés par une infinité d'états intermédiaires dans lesquels la sphère A coïncide en partie avec B. C'est seulement dans ce cas de coïncidence partielle que les surfaces sphériques peuvent avoir des parties communes. 2°. Si p' est situé à l'intérieur de B, la même chose se passe, avec cette différence que la sphère A, à partir d'un certain moment, est tout entière renfermée dans B. 3°. Enfin, si a' est situé à la limite de B, A ne peut jamais tomber tout entière à l'intérieur ou à l'extérieur de B (théor. 4). Elle doit donc renfermer complétement la sphère B, ou coïncider en partie avec elle. Dans ce dernier cas seulement les surfaces sphériques peuvent se couper. (1)

Telles sont les situations possibles de deux sphères non concentriques à l'égard l'une de l'autre. Quelle que soit la

(1) Toutes ces considérations ne se basent-elles pas sur autre chose que les expériences?

(*Note du traducteur.*)

position des centres, quand les surfaces sphériques se coupent, les sphères doivent avoir des parties communes.

Nous laissons de côté, pour le moment, la question de savoir si les parties communes de deux sphères consistent en un ou plusieurs fragments. En tout cas, cette partie, qui est chaque fois déterminée, doit chaque fois aussi avoir des limites déterminées. Comme ces limites appartiennent aux surfaces sphériques, il suit que certaines parties de celles-ci se séparent du reste, peu importe d'ailleurs que ce soit en un ou plusieurs fragments.

N'y a-t-il qu'un seul fragment, alors l'intersection entière de la surface sphérique, tient ensemble d'une façon continue, et est identique avec le lieu périphérique. Y a-t-il plusieurs fragments, alors l'intersection entière de la surface sphérique se compose de plusieurs lieux périphériques dont chacun tient ensemble d'une façon continue, et sépare un fragment de chaque surface sphérique.

Définition. On nomme *calottes* les parties d'une surface sphérique séparées l'une de l'autre par un lieu périphérique.

Ces explications permettent de rechercher si le lieu périphérique est une partie finie de la surface sphérique.

La surface sphérique A autour du centre a' coupe la surface sphérique B autour du point b' dans le lieu périphérique c dont le point c' fait partie. Nous menons ensuite par le point d', qui appartient à la surface B, mais non au lieu c, une surface sphérique A' autour du centre a', laquelle coupe la surface B dans le lieu périphérique d; et c aussi bien que d détache complètement sur la surface B deux portions ou calottes. Or d et c n'ont aucun point commun (théor. 14), les calottes restent séparées; de manière que nous avons en tout trois fragments dont l'un est situé entre les deux autres. (1)

(1) Ici nous croyons remarquer un saltus considérable: où a-t-il été établi que les deux lieux périphériques c et d fussent l'un intérieur à l'autre? Il a été prouvé qu'ils ne peuvent se couper, mais non qu'ils ne peuvent être exté-



Définition. La partie d'une surface sphérique située entre deux lieux périphériques concentriques, se nomme *zone.*

De là, par une méthode analogue à celle qui nous a donné le théorème 7, les deux théorèmes suivants :

Théor. **15**. *Le lieu périphérique n'est pas une partie finie de la surface sphérique.*

Théor. **16**. *Tout lieu périphérique est la limite d'une partie de surface sphérique.*

Définition. Nous nommons *ligne* la limite d'une surface.

Théor. **17**. *Le lieu périphérique est une ligne.*

Désormais, nous donnerons au lieu ou ligne périphérique le nom de *circonférence.*

Théor. **18**. *Le lieu du mouvement d'une ligne qui ne reste pas en elle-même, est une surface.*

Après avoir considéré les zones, parlons des calottes.

Si l'on étend des deux côtés de la surface sphérique la suite continue des circonférences, la zone devient toujours plus grande et se rapproche de plus en plus de la surface sphérique elle-même. Les fragments intérieurs ou calottes deviennent donc de plus en plus petits. Le résultat de cette diminution continue ne peut être une surface finie, car nous pourrions diviser cette surface en une zone et une calotte plus petites. Le centre a' d'une sphère variable A et situé sur la surface de la sphère invariable B, doit être la limite dont s'approchent infiniment et la sphère A et les calottes et les circonférences. En général, même quand le centre a' de la sphère variable A ne tombe pas sur la surface de la sphère invariable B, la limite de cette diminution

---

rieurs; de manière qu'un troisième lieu périphérique e, dont un des points est situé entre c et d, peut fort bien ne pas diviser la zone en deux zones plus petites. Les considérations qui précèdent et d'où il ressort que l'auteur n'est pas encore en mesure de démontrer la non-pluralité des fragments, donnent à notre observation une plus grande valeur encore. Si elle est juste, ce que nous croyons, et si le défaut que nous signalons n'est pas à éviter, tous les raisonnements qui suivent en sont infirmés.

(*Note du traducteur.*)

continue est encore un point : c'est ce qui découle de la seconde proposition de notre troisième expérience. Car si la limite, que nous avons prouvé n'être aucune surface, avait une étendue quelconque, tous les points sans exception qui seraient liés invariablement à deux autres seraient mobiles ; mais l'expérience montre qu'une certaine suite de places liées entre elles et avec les points fixes restent immobiles ; donc cette diminution progressive doit avoir pour résultat final un point.

IV. *Enfin si, outre les deux points fixes précédents, il y en a un troisième fixe aussi, tous les points du corps deviennent immobiles.*

Nous suivrons la même voie que précédemment. Soient *a'* et *b'* les seuls points fixes : le lieu du mouvement d'un point *d'* sera une circonférence *l* ; soient *a'* et *c'* les seuls points fixes, le lieu du mouvement de ce même point *d'* sera une autre circonférence *l'* (1) ; que les deux conditions se réunissent, il suit (comme plus haut le théor. **12**) que :

Théor. **19**. *Le lieu géométrique du mouvement d'un point* d' *lié invariablement à trois autres* a' b' c', *est l'intersection des lieux de son mouvement autour de deux de ces points.*

Comme, d'après l'expérience, le corps est devenu immobile, cette intersection ne peut consister en une suite continue de points ; elle doit donc se ramener au point *d'* seul, ou à une suite discontinue de points.

Définition. Nous nommons *semi-concentriques* des circonférences qui ont un de leurs deux centres commun.

Théor. **20**. *L'intersection de deux circonférences semi-concentriques consiste en un nombre (pour le moment indéterminé) de points discontinus.*

Le théorème **15** a prouvé que si les surfaces sphériques se coupent, les sphères coïncident en partie. Nous pou-

---

(1) Pourquoi *l'* est-il différent de *l*? On ne se trouve plus ici dans le même cas qu'au théorème 12.

(*Note du traducteur.*)

vons nous figurer passant par le point d' trois sphères autour des centres a', b', c', lesquelles auront des parties communes deux à deux, et qui doivent, par suite, avoir quelque chose de commun entre elles, au moins le point d'. Mais elles ne peuvent coïncider complètement, sans quoi leurs limites, qui sont des calottes, devraient coïncider, et le lieu géométrique du point d' autour des points a', b' et c' serait une calotte; or, d'après les théorèmes **12**, **15** — **17**, ce doit être une circonférence; ce ne peut donc être une calotte.

Si les trois sphères ont une portion finie commune, celle-ci doit avoir des limites qui fassent partie des portions communes aux deux sphères. Par suite, une partie déterminée de ces limites, et par conséquent aussi de chaque circonférence, laquelle partie est la limite commune, doit être complètement séparée, limitée à l'égard de la partie restante. Mais si l'élément commun aux trois sphères se réduit à un point, on peut montrer, en passant du fini à l'infiniment petit, que de même par ce point, la circonférence est divisée en deux parties.

Théor. **21**. *Si des circonférences semi-concentriques ont un point commun, elles se coupent de manière que deux parties de chacune d'elles sont complètement limitées l'une à l'égard de l'autre.*

Comme l'intersection qui produit cette limitation, consiste, d'après le théorème précédent, en points discontinus, il s'en suit que ces parties sont complètement limitées l'une à l'égard de l'autre par des points.

De même que nous avons eu plus haut des écorces et des zones, nous aurons maintenant des parties de la circonférence ou *arcs*, que nous diviserons indéfiniment, ce qui nous fournira les théorèmes suivants :

Théor. **22**. *Le point n'est pas une partie de la circonférence.*

Théor. **23**. *Le point est la limite de la ligne.*

Théor. **24**. *La trajectoire d'un point est une ligne.*

La condition que l'élément mobile ne reste pas en lui-même disparaît ici, parce que l'élément absolument simple dès qu'il reste en lui-même, ne se meut pas.

Il reste encore à remarquer d'ailleurs que le lieu du mouvement d'un point n'a pas besoin d'être limité à la ligne, mais peut consister en figures produites par le mouvement de la ligne et de la surface.

D'après la discussion précédente, les calottes d'une surface sphérique et limitée par des circonférences, en arrivent à se réduire à un point, par la perte successive de zones. Comme de chaque côté de la zone il y a une calotte, nous avons de chaque côté un point limite, ce qui fait en tout deux points, et seulement deux points. Et ces deux points sont ceux où commence et où finit la coïncidence partielle des deux sphères, dont l'une A varie tandis que l'autre B reste invariable. L'élément commun est toujours (en tant qu'il est continu) le lieu du mouvement de chacun des points qui lui appartiennent, et qui sont liés invariablement aux centres (théor. **12**). S'il consiste en un seul point, celui-ci est le propre lieu de son mouvement et est par conséquent immobile. Il y a donc, sur chaque surface sphérique B, deux points, et seulement deux, qui, liés invariablement aux centres a' et b', restent immobiles. Nous pouvons maintenant, d'un côté, faire décroître d'une manière continue la sphère B jusqu'à son centre b'; de l'autre, la faire croître à l'infini; ces deux points se meuvent d'une façon continue de manière, d'un côté, à coïncider avec b', de l'autre, à s'éloigner à l'infini. Du point b' partent donc deux lignes infinies, que nous pouvons regarder comme une ligne unique, puisque ce point b' leur est commun. Cette ligne jouit de cette propriété que, liée invariablement aux points a' et b', elle reste immobile.

Le point b' tombe dans cette ligne; en est-il de même du point a'? Parmi toutes les surfaces sphériques B, il en est une, déterminée par la liaison fixe $a'\,b'$, sur laquelle sont deux points immobiles qui tombent dans cette ligne : a' étant, par hypothèse, immobile, est donc un de ces deux points. On peut prouver de la même manière que tout point immobile tombe dans cette ligne, ou que tout point en dehors d'elle est mobile. Donc :

THÉOR. **25**. *Dans la rotation d'un corps autour de deux points, il existe une ligne, mais une seule, qui reste immobile, et ces deux points en font partie.*

Nous pouvons donc dire :

Définition. Nous nommons *droite* la ligne qui, dans sa rotation autour de deux points fixes, ne sort pas d'elle-même.

Grâce à cette définition, nous pouvons donner au théorème **25** la forme suivante, sous laquelle il se présente ordinairement comme axiome indémontré et indémontrable :

Entre deux points on peut toujours mener une droite; on n'en peut mener qu'une, et on peut la prolonger à l'infini (1).

Plaçons ici une remarque. La manière dont, avant toute géométrie, l'expérience nous conduit à la représentation de la ligne droite, concorde essentiellement avec le précédent développement. Dans toute rotation autour d'un axe, nous remarquons facilement qu'à chaque section le mouvement est d'autant moindre que nous approchons d'une place déterminée. Un fil fortement tendu se nomme droit, parce qu'il reste en lui-même quand on le fait tourner autour de deux de ses points. Ainsi l'expérience nous donne deux éléments : le repos en soi-même pendant la rotation, et le décroissement du mouvement à mesure qu'on s'approche d'une certaine place. A ces éléments empiriques vient s'adjoindre notre propre activité créatrice. Elle augmente à l'infini cet approchement pour lequel l'expérience ne nous donne aucune limite, et arrive ainsi à la minceur infinie, et de là à la ligne droite. Ainsi naît en nous de la combinaison idéale des faits empiriques la représentation de la ligne droite; cette représentation ne précède donc pas absolument toute expérience (2).

---

(1) Tous les raisonnements qui précèdent sont invalidés par le saltus signalé page 288.

(*Note du traducteur.*)

(2) Nous avons essayé de montrer (pages 173 et suiv.) que cette expérience donne, non pas la ligne droite mais une propriété de la ligne droite.

(*Note du traducteur.*)

Nous sommes ici à la fin de la partie analytique de notre travail. En partant de ce qui est donné empiriquement, nous sommes arrivé aux éléments de toutes les figures étendues (1). Désormais, nous n'aurons plus besoin de représentation contenant en elle quelque chose de matériel. Notamment, à la place de la liaison fixe entre deux points, nous avons un chemin absolument déterminé, la ligne droite.

Dans la synthèse, nous partons de l'élément simple, le point. Son mouvement engendre la ligne. Celle-ci, à son tour, peut être considérée comme élément d'un nouveau mouvement qui engendrera la surface; et de même la surface engendrera le corps. Que nous ne puissions arriver à la génération du corps que par une triple opération, c'est ce que nous avons reconnu dans la partie analytique, quand nous avons montré que l'espace n'était susceptible que d'une triple division à l'infini, ni plus ni moins. Nous ne savons rien de la cause efficiente ni de la cause finale de ce fait.

Définition. Nous nommons *série* une suite d'éléments procédant suivant une certaine loi.

Définition. La génération d'une série d'éléments hors d'un élément par une position répétée, un nombre fini ou infini de fois de cet élément se nomme *dimension.*

De là il suit que :

Théor. **26.** *L'espace a trois dimensions.*

Étudions maintenant le résultat du mouvement du point,

---

(1) On se demande pourquoi le plan ne fait pas partie de ces éléments, et pourquoi aussi l'idée de la ligne droite est déduite dans la partie analytique du travail. Cette définition de la ligne droite, si laborieusement établie, n'est, en somme, que la concentration de la IIIe expérience. L'auteur pouvait dire, en effet, dès l'abord en définition : Nous appelons *ligne droite*, la suite continue des points qui restent immobiles dans un corps qui tourne autour de deux points fixes. On ne voit pas au juste ce que l'analyse vient ajouter à l'intuition empirique, si ce n'est la substitution du terme mathématique *point* au terme vulgaire *place*.

(*Note du traducteur.*)

c'est-à-dire, la ligne. Nous savons ce qu'est la ligne droite : il nous reste à prouver les différentes propositions que l'on donne, tantôt sous le nom de définitions, tantôt sous celui d'axiomes.

La définition d'Euclide, *la ligne droite est celle qui est située également entre ses points*, peut avoir une double signification. On pourrait entendre par là que la ligne droite se trouve placée entre les uns comme entre les autres, et que, par suite, une portion quelconque de droite peut être mise sur une plus grande, de manière à y tomber tout entière. C'est là, en effet, une propriété de la ligne droite. Il suit de là (théor. **25**) qu'entre deux points une seule ligne droite est possible, et que chaque portion d'une ligne droite, qui est placée sur une autre portion par deux de ses points, y tombe complétement. Mais ce n'est pas là une propriété exclusive de la ligne droite, et ainsi la définition ne vaut rien. Nous devons donc admettre la seconde interprétation, déjà donnée par Clavius : *Nullum punctum intermedium ab extremis sursum aut deorsum vel huc vel illuc flectendo subsaltat.* Ici nous ne comparons plus ensemble différentes paires de points, mais les différents côtés d'une même paire vers lesquels la ligne peut se fléchir, et à l'égard desquels la ligne droite se tient dans le même rapport. Malgré cette interprétation, qui paraît la bonne, la définition pèche par indétermination, car elle ne donne aucun caractère pour reconnaître les divers côtés à l'égard desquels la ligne droite doit rester indifférente ; ceux-ci ne peuvent, en réalité, être donnés qu'avec le secours de la ligne droite, et par là elle est sous-entendue dans la définition. En outre, de quelque manière qu'on doive entendre la définition, on n'a pas établi l'existence d'une telle ligne (1).

---

(1) Nous avons montré que la première interprétation seule est admissible, et que la définition d'Euclide est, en réalité, la plus exacte de toutes celles qu'on eût encore données.

(*Note du traducteur.*)

Notre définition (théor. 25) renferme ce que celle d'Euclide a de vrai; la ligne droite dans sa rotation, ne s'infléchissant d'aucun côté, se tient également à l'égard de tous les côtés.

A la définition d'Euclide se rattache celle qui donne pour caractère exclusif à la ligne droite de conserver toujours la même direction; car une ligne qui ne s'infléchit d'aucun côté, garde partout la même direction. Mais qu'est-ce que la direction? On n'a pas accoutumé de le dire, sous la charmante excuse qu'on doit savoir cela d'avance, tactique semblable à celle qui, s'appuyant sur l'apriorité, met de côté toute explication génétique.

La définition de la ligne droite, comme étant la ligne de direction constante, est certainement la plus favorable pour le premier enseignement. Nous nous proposons d'expliquer scientifiquement l'idée de direction, et de prouver rigoureusement que notre ligne droite est en même temps la ligne de direction constante.

Un lieu n'est pas identique avec un autre lieu quelconque qui a la même figure. Ce par quoi il s'en distingue, c'est la situation.

Définition. On nomme *situation* cette propriété d'un lieu mathématique qui le distingue, quand on le compare avec tout autre qui peut prendre la même figure.

Quand on donne les lieux avec lesquels on le compare, on emploie les expressions de *situation à l'égard* d'un autre lieu, ou *par rapport à* un autre lieu. La situation d'un lieu par rapport à la totalité des lieux égaux dans l'espace infini, est sa situation absolue.

Définitions. La *direction* est la relation du lieu d'où part un élément mobile ou conçu comme mobile, au lieu où il va. Nous entendons par *relation de deux lieux* la nature du passage d'un élément géométrique d'un lieu a' à un autre b', laquelle découle de la différence entre la situation du lieu b' à l'égard du lieu a' et la situation de tous les autres lieux que peut occuper b' dans son mouvement autour de a'.

Dans cette définition nous parlons d'un chemin absolument déterminé par deux points : d'après le théorème **25**, ce chemin existe ; mais on pourrait, si l'on en était requis, l'énoncer avant la définition de la ligne droite.

Sur les explications données touchant la nature du point, nous fondons la définition de la direction momentanée.

Définition. Nous nommons *direction linéaire momentanée* la nature du passage d'un point a' à celui b' qui le suit immédiatement, laquelle dépend de la différence entre la situation de b' par rapport à a', et la situation à l'égard du même point a' de tous ceux qui lui sont adjacents.

Nous parlons de points adjacents par fiction (voir plus haut).

Le chemin en ligne droite, ou la ligne droite, a seule, d'après ce qui précède, proprement une direction ; mais de ce que la ligne droite est la seule qui soit absolument déterminée par deux points (théor. **25**), nous pouvons, à la place de la définition dont nous nous sommes servi, dire :

THÉOR. **27**. *La ligne droite est la ligne de direction constante.*

THÉOR. **28**. *Dans toute ligne droite il y a deux mouvements possibles en sens contraire.*

Définition. Une ligne est dite *brisée* si elle change de partie en partie sa direction ; si elle la change d'une façon continue, c'est-à-dire infiniment peu à chacun de ses points, elle est dite *courbe.*

THÉOR. **29**. *En chaque point d'une ligne courbe, sa direction momentanée s'exprime par la ligne droite qui passe en même temps par le point le plus rapproché* (1).

Ce qui précède sert de fondement à la proposition qu'une ligne courbe peut être considérée comme une ligne infiniment brisée inscrite ou circonscrite.

Définition. On nomme *longueur* la grandeur d'une ligne.

---

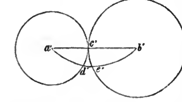
(1) De cette proposition résulterait qu'en un point d'une courbe il y aurait deux tangentes.

(*Note du traducteur.*)



Demandons-nous quelle est la plus courte ligne qu'on puisse tirer entre deux points, et s'il y a une, plusieurs ou une infinité de ces lignes minima. Nous ne le savons pas encore ; mais, comme grandeur, elle est certainement déterminée puisqu'elle est la plus courte. La ligne droite, et par conséquent sa grandeur, est absolument déterminée par deux points ; elle doit donc être dans un rapport déterminé avec la ligne minimum. Quel est ce rapport?

On sait qu'Euclide a établi qu'un côté d'un triangle est toujours plus petit que la somme des deux autres. De là suit que toute ligne brisée entre deux points est plus grande que la ligne droite ; de là suit aussi, par des considérations de limites, que toute ligne courbe est plus grande que la ligne droite, et qu'ainsi la ligne droite est la plus courte. Nous allons essayer de donner la preuve générale que la ligne la plus courte doit passer par un point quelconque de la droite et par conséquent être droite elle-même. Soient, entre deux points a' et b', la ligne droite $a'b'$ et une autre ligne quelconque. Faisons passer par un point arbitraire c' de la droite deux surfaces sphériques, l'une autour de a', l'autre autour de b'; elles n'auront que le point c' commun (théor. **25**). Toute ligne



qui ne passe pas par le point c', doit, par suite, avoir deux points d' et e', l'un par où elle sort de la sphère a', l'autre par où elle entre dans la sphère b', de manière que la portion $d'e'$ est entre les deux sphères. Cette ligne se décompose donc en trois portions $a'd'$, $d'e'$ et $e'b'$. Imaginons que $a'd'$, soit lié invariablement à a', de manière que la surface sphérique a' sera le lieu du mouvement du point d' autour de a', et que par rotation ce dernier point pourra être amené en c'. De la même manière le point e' pourra y être amené aussi. La nouvelle ligne résultant de cette double rotation,

laquelle passe par le point c' et se compose des portions $a'd'$ et $e'b'$, est plus courte que la proposée de la portion $d'e'$. Donc la ligne la plus courte doit passer par le point c'. Le point c' ayant été pris arbitrairement, il est démontré que :

THÉOR. **30.** *La ligne droite est la plus courte entre deux quelconques de ses points* (1).

Définition. La grandeur d'un chemin absolument déterminé par deux points, se nomme leur *distance.*

De là :

THÉOR. **31.** *La ligne droite est la mesure de la distance ou la longueur minimum.*

THÉOR. **32.** *Deux sphères se coupent quand la somme de leurs rayons est plus grande et leur différence plus petite que la distance des centres.*

Définition. Nous nommons *surface équidistante* celle dont tous les points sont également distants de deux points fixes.

THÉOR. **33.** *Chaque point de la ligne droite qui passe par les deux centres d'une des circonférences qui engendrent cette surface est en même temps le centre de cette circonférence.*

THÉOR. **34.** *La ligne droite menée par deux points quelconques d'une surface équidistante, y est contenue tout entière.*

THÉOR. **35.** *L'intersection de deux surfaces équidistantes est une ligne droite.*

THÉOR. **36.** *Deux surfaces équidistantes qui ont trois points communs non situés en ligne droite, sont identiques* (2).

Si l'on fait tourner une droite $a'b'$ autour d'une autre $a'c'$ à laquelle elle est invariablement liée, chaque point d' de la première décrit une circonférence, et la surface engendrée est dite *cône.* La *direction de la rotation* de $a'b'$ passant en $a'c'$, et la *direction rotatoire momentanée*, se définissent comme la

---

(1) Cette démonstration tombe sous le coup de l'observation que nous avons faite page 288.

(*Note du traducteur.*)

(2) Nous avons omis de traduire les démonstrations.

(*Note du traducteur.*)

direction linéaire; seulement on doit remplacer le mot *point* par le mot de *droite*.

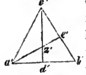
Définition. Le lieu d'une ligne droite qui se meut autour d'un point a' avec une direction constante (1), est un *plan*.

La surface équidistante étant la seule qui soit déterminée absolument par deux lignes droites qui partent d'un même point, il s'en suit que :

THÉOR. **37**. *Tout plan est une surface équidistante.*

THÉOR. **38**. *Toute surface par deux points de laquelle on peut faire à volonté passer une ligne droite qui y soit contenue tout entière, est un plan.*

Ce dernier théorème forme la définition vulgaire du plan.



On ne démontre pas, quoiqu'on doive le faire, qu'une telle surface est possible ; que la ligne droite $a'c'$, ne passe ni au-dessus ni au-dessous de $c'd'$, mais la coupe en un point z'.

La définition choisie par nous est génétique, elle établit l'analogie qui existe entre la droite et le plan, celle-là étant le produit de la constance de la direction linéaire, celui-ci de la constance à la fois et de la direction linéaire et de la direction de la rotation.

THÉOR. **39**. *Toute ligne droite passant par deux points d'un plan, y est contenue tout entière.*

Par un point a' d'une ligne droite $a'b'$ d'un plan indéfini, on peut tirer d'autres lignes droites dans le même plan. Chacune de celles-ci a deux directions (théor. **28**). De ce qu'elles sont tout entières dans le plan, une partie de celui-ci doit être située de chaque côté de la droite $a'b'$; si l'on tourne l'une d'elles autour de $a'b'$ de manière à rabattre un de ses points dans l'autre partie, elle y tombera tout

(1) Cette constance dans la direction du mouvement d'une droite est-ce une notion bien claire et bien précise?

(*Note du traducteur.*)



entière (théor. **36**). Si nous nommons *égales* deux figures de l'espace qui sont placées de manière à coïncider par tous leurs points, on voit que :

Théor. **40**. *Toute ligne droite située dans un plan indéfini, le divise en deux parties égales.*

Étudions maintenant le rapport de la circonférence et du plan.

Nous avons vu plus haut qu'une circonférence qui est le lieu des points situés à égale distance de deux autres a' et b', appartient tout entière au plan, et que le point c', qui divise en deux la droite $a'\,b'$, tombe aussi dans le plan, et que, étant comme tous les points de $a'\,b'$, également éloigné de la circonférence, il en est par conséquent un centre. Si l'on donne le plan et le point c', on peut construire par la rotation dans le plan d'une ligne droite de longueur convenable, la circonférence comme trajectoire du point limite de cette droite. La trajectoire de la rotation d'une droite est un *cercle*.

Théor. **41**. *Les arcs d'un même cercle sont égaux si leurs points limites coïncident.*

Corol. *Les arcs peuvent se mouvoir sur la circonférence.*

Théor. **42**. *Les arcs d'un même cercle ou de cercles égaux sont entre eux comme leurs secteurs.*

Il est donc possible de mesurer la rotation aussi bien par les arcs que par les secteurs; c'est donc une grandeur mathématique.

C'est par la grandeur de la rotation constante que l'on mesure la différence de direction de deux lignes qui partent du même point, de même que l'on mesure la distance par la ligne de direction constante.

Définition. On nomme *angle* la différence des directions de deux lignes qui partent d'un même point.

La définition d'Euclide dit au fond la même chose; elle désigne l'essence de l'angle plus convenablement que celle qui en fait un plan indéfini. Les auteurs qui l'ont blâmée n'ont pas su en apprécier la profondeur et la jus-

tesse, qualités qui doivent cependant être le but de toute science, et notamment des mathématiques. Au lieu de repousser la définition d'Euclide, on doit la compléter et expliquer le terme d'*inclinaison* par l'expression de *différence de direction*.

De notre définition de l'angle il suit que:

Théor. **43**. *L'arc est la mesure de l'angle qui lui appartient.*

Pour comparer les grandeurs des angles, il faut une unité d'angle. Comme la droite peut s'engendrer par deux mouvements en sens contraires d'un de ses points, nommons *angle de* 180° la différence de deux directions opposées, et *angle droit* la moitié d'un angle de 180°.

Théor. **44**. *Tous les angles de* 180° *sont égaux.*

Théor. **45**. *Tous les angles droits sont égaux.*

Nous pouvons donc prendre l'angle droit pour unité d'angle.

Théor. **46**. *La trajectoire d'une demi-circonférence qui tourne autour d'un de ses diamètres, est une sphère.*

Corol. *Tout plan passant par le centre coupe la sphère suivant un cercle.*

Par suite, tous les points d'une surface sphérique peuvent être atteints par la double rotation d'une droite autour d'un de ses points. Cette proposition rend possible la comparaison générale de toutes les directions linéaires qui partent de différents points, et fournit *une solution simple et tout-à-fait rigoureuse* du problème des parallèles.

Soient autour des deux points a' et b' deux sphères égales: les rayons de chacune d'elles sont situés dans toutes les directions possibles; une comparaison des directions partant de a' est possible avec celles partant de b', dès qu'à chaque point situé sur la sphère A nous en pouvons trouver un correspondant sur la sphère B. Nous avons vu plus haut qu'il existe deux paires de points pour lesquelles cela est possible au moyen de la ligne droite seule. Aux deux directions opposées de la droite a' b' partant de a', on peut désigner des directions correspondantes partant de b'. Si la

surface sphérique A est coupée par la droite $a' b'$ en c' et c'', alors les deux points d' et d'' lui correspondent sur la sphère B. Un point e' qui n'appartient pas à la droite $a'b'$ sur la sphère A n'est pas complètement déterminé par sa distance à chaque point de cette droite, mais en tant que son lieu est une circonférence e appartenant à la sphère A. Sur la sphère B on peut facilement trouver par des déterminations de distances, la circonférence correspondante f, qui doit être égale à e, mais pas aussi facilement un point f' qui corresponde à e'. Par le secours du plan on trouvera f' comme suit :

Faisons passer un plan par les points a', b' et e' : son intersection avec chacune des deux sphères est une circonférence, et, par suite, l'intersection de la partie du plan qui est du côté de e' par rapport à $a' b'$, est une demi-circonférence. Le point f' qui doit correspondre au point e', doit être situé sur un arc correspondant ; de plus, la ligne droite $b' f'$ doit être distante de $b' d'$ du même angle dont $a' e'$ est distant de $a' c'$; par suite l'arc $d' f'$ doit être égal à l'arc $c' e'$, si le point f' doit correspondre au point e'. Nous avons ainsi deux déterminations auxquelles le point f' doit satisfaire en même temps ; mais un seul est dans ce cas, et c'est celui que l'on obtient si l'on porte l'arc $c' e'$ à partir de d' sur la circonférence intersection du plan $a' b' e'$ avec la surface sphérique B, et naturellement de ce côté du plan par rapport à $a' b'$ où e' est situé. Ainsi à chaque rayon d'une sphère il y en a un, mais un seul, qui correspond dans l'autre, et tous deux ont même direction linéaire.

Comme la direction dans chaque droite est constante et indépendante de sa grandeur, ce que nous disons des rayons peut se dire des lignes droites ; donc :

Théor. **47**. *A chaque droite* a' e' *qui part d'un point* a', *il en correspond une autre, mais une seule,* b' f', *qui, partant du point* b', *a même direction.*

Définition. On nomme *parallèles* des droites de même direction.

Donc :

Théor. **48**. *Si une droite* a′ b′ *fait avec deux autres* a′ e′ *et* b′ f′, *situées dans le même plan, et du même côté de la sécante* a′ b′, *deux angles correspondants égaux, les deux dernières sont parallèles.*

On est en droit de retourner cette proposition ; car il n'y a (théor. **47**) qu'une droite *b′ f′* qui, partant du point *b′*, court parallèlement à une autre *a′ e′*. Voici cette inversion :

Théor. **49**. a) *Deux droites parallèles sont situées dans le même plan.* b) *Deux droites parallèles font avec une même sécante des angles correspondants égaux.*

Cette dernière partie du théorème se démontre très-simplement comme suit : la sécante a, en chacun de ses points d'intersection, même direction ; les lignes parallèles ont même direction ; donc les différences des directions de la première et des deux autres, c'est-à-dire les angles correspondants sont égaux.

On sait que de là il est facile de déduire les théorèmes suivants :

Théor. **50**. *La somme des angles extérieurs de toute figure rectiligne est égale à quatre droits.*

Théor. **51**. *La somme des trois angles d'un triangle est égale à deux droits.*

On sait également que, ce dernier théorème établi, il est aisé de démontrer les propositions ordinaires sur l'intersection des droites dans un plan. Elles se divisent en deux classes : à la première appartiennent les suivantes :

a) *Si deux droites coupées par une sécante font des angles correspondants égaux, elles ne se coupent pas.*

b) *Si deux droites se coupent, elles font des angles inégaux avec une même troisième.*

Comme conséquence de celle-ci, on trouve que *la somme de deux angles d'un triangle est plus petite que deux droits* ; que *l'angle extérieur est plus grand que l'un des intérieurs non adjacents*, etc.

La seconde classe contient les propositions inverses :

c) *Si deux lignes droites indéfinies ne se coupent pas, elles forment avec une sécante des angles égaux.*

d) *Si elles font des angles inégaux, elles se coupent.*

Les deux dernières, comme les deux premières, ne diffèrent entre elles que sous le rapport de la forme logique; et elles se ramèneraient toutes les quatre l'une à l'autre, si à l'une d'entre elles on pouvait ajouter : *et seulement dans ce cas.* La difficulté spéciale de la théorie des parallèles est donc de prouver une proposition de chaque classe : nous avons prouvé la première; nous allons prouver la dernière (1).

. . . .

A partir de ce point, la rigueur géométrique ne faisant plus défaut dans les traités ordinaires, nous regardons notre tâche comme finie.

---

(1) Nous renvoyons, pour la critique de cette partie du travail de M. Ueberweg, à ce que nous disons de la *direction* (pages 188 et suiv. et page 230) et des parallèles (page 216).

(*Note du traducteur.*)



ERRATA ET ADDENDA.

Page 47, *à la note, ligne* 1re, *après le mot* lois, *ajoutez :* scientifiques.

» 49, *id.* *id.* *dernière, au lieu de* dans l'appendice, *lisez :* à la fin du paragraphe suivant.

» 61, 4e *ligne, au lieu de* l'attraction? *lisez :* l'attraction.

» 68, 4e *ligne, après le mot* arithmétique, *doit venir la note suivante :*

Entre la géométrie et l'arithmétique, vient se placer *l'algèbre* ou la science de la *quantité* en général.

Page 137, 28e *ligne, ajoutez :*

Enfin, cette même difficulté est insurmontable, si l'on veut donner, d'une façon élémentaire, les conditions de similitude des figures composées de lignes tracées arbitrairement dans l'espace ; telle serait, par exemple, la figure formée par les trois directrices d'un hyperboloïde, c'est-à-dire, par trois droites qui ne se coupent pas et ne sont pas parallèles.

TABLE DES MATIÈRES.

